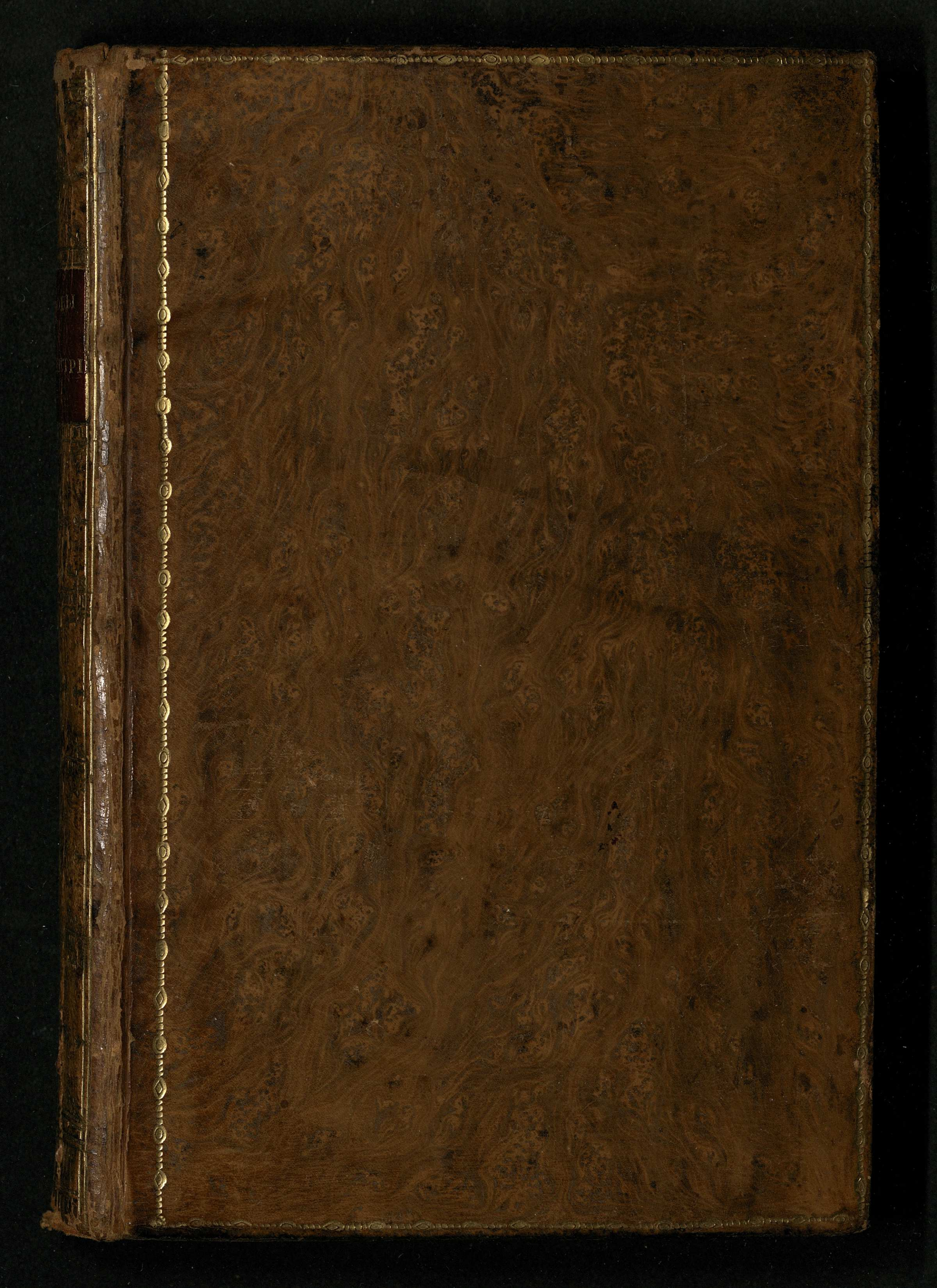
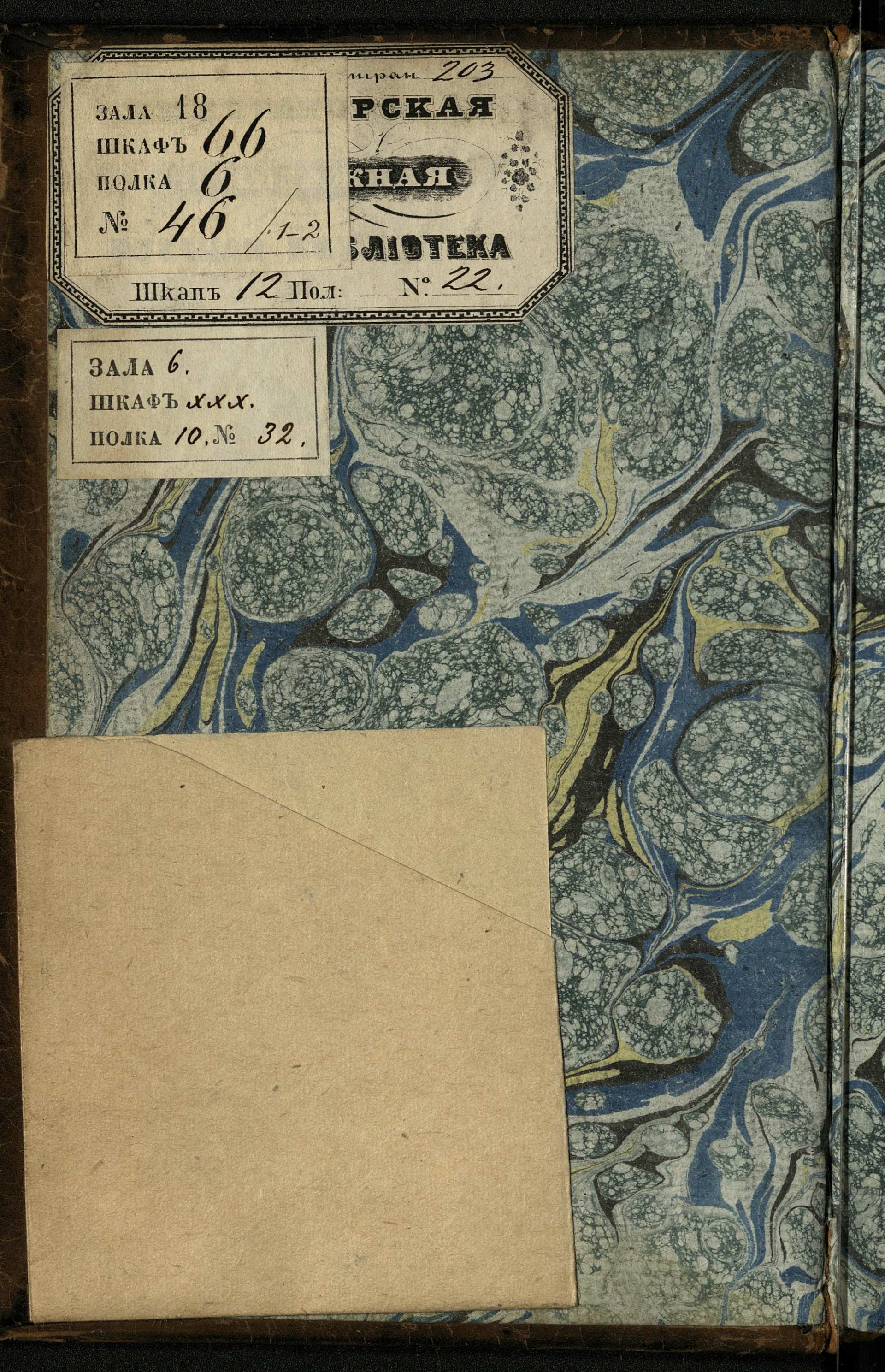
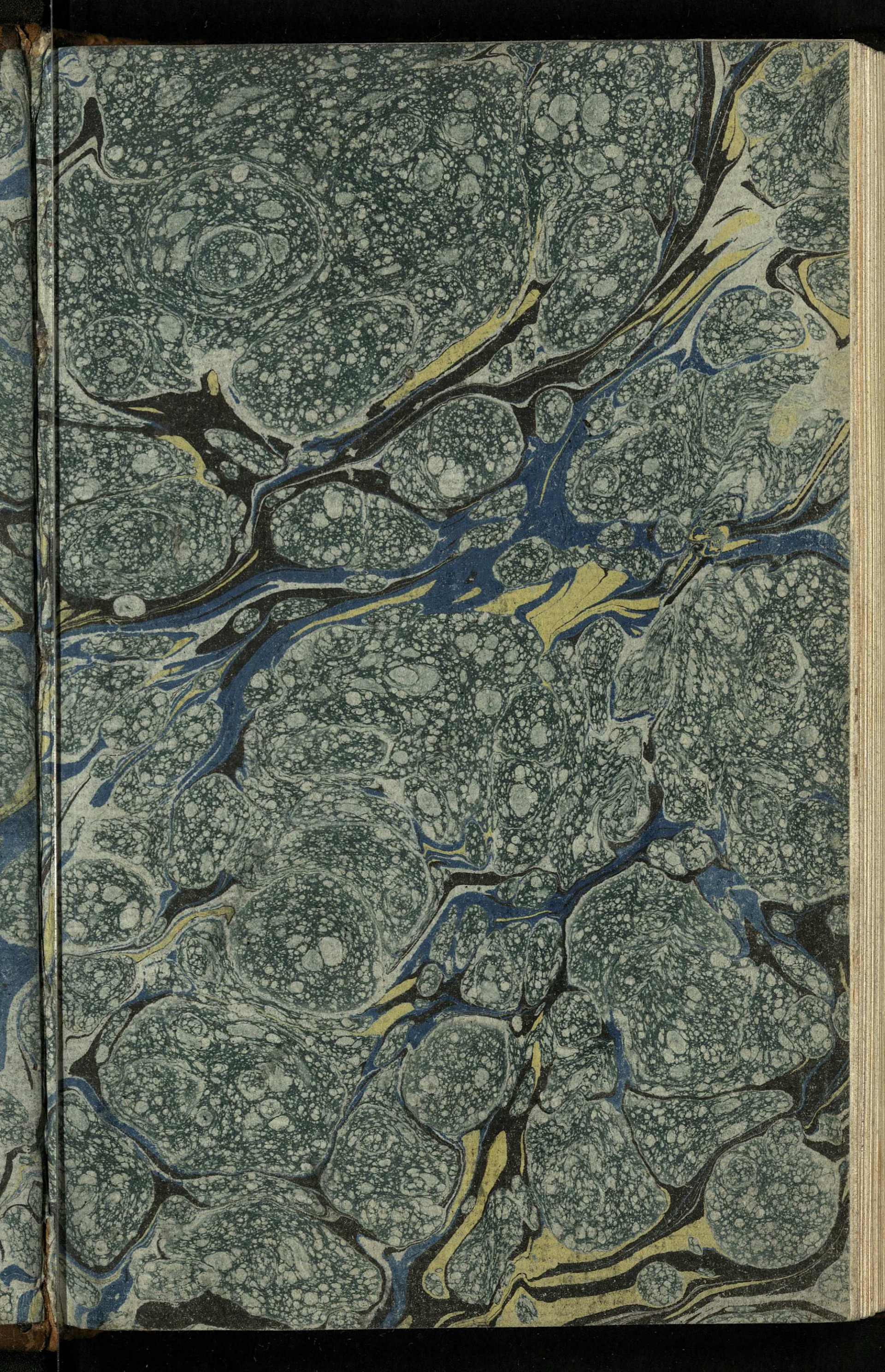



203
ЗАЛА 18
ШКАФЪ 66
ПОЛКА 6
№ 46 1-2
Шкапъ 12 Пол: №. 22.
ЗАЛА 6.
ШКАФЪ XXX.
ПОЛКА 10. № 32.



8 – 5 – 146

Нѣтъ, – есть изд. 2е

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРІИ,

переведенныя

изъ Курса,

Сочиненнаго Г^мъ Безу, для назначающихъ себя

къ

мореплаванїю,

Однимъ изъ возпитанныхъ при Морскомъ Шляхетномъ Кадетскомъ Корпусѣ.

при нес[illegible] леніемъ Гаврила Давыд[illegible]



Печатаны при Типографїи онагожъ Корпуса, 1794 года.

ЕГО ВЫСОКОПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

ІВАНУ ЛОГИНОВИЧУ ГОЛЕНИЩЕВУ КУТУЗОВУ,

ФЛОТА АДМИРАЛУ,

Государственной Адмиралтейской Коллегіи Члѣну,

Морскаго Шляхетнаго Кадетскаго Корпуса

Главному Директору

и

Орденовъ Св: Александра Невскаго, Св: Равноапостольнаго Князя Владимира перьвой степени и Св: Анны Кавалеру

МИЛОСТИВОМУ ГОСУДАРЮ.

ВЫСОКОПРЕВОЗХОДИТЕЛЬНЫЙ МУЖЪ,

МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ,

Возпитанный подъ сѣнїю благороднаго Училища, ввѣреннаго отъ прозорливыя МОНАРХИНИ нашея особливому Вашему попеченїю, взысканный надмѣру милостями Вашими и всегда Вами покровительствованный, кому съ бо́льшею приличностїю и справедливостїю могу посвятить переведенную мною Геометрїю, какъ не Вашему Высокопревозходительству? Вы, съ великостїю сана соединя обширныя познанїя, приобрѣтенныя собственными трудами Вашими, любите сами ученїе, и возбуждая разными ободренїями охоту къ оному въ другихъ, ободрили и меня къ переводу сея полезныя Корпусу книги. Мощность безъ просвѣщенїя и ласки есть по большей части

непрїятна; часто ненавистна; любезна, когда она знаетъ, какъ снисходить. Симъ то образомъ мужи на высокихъ степеняхъ избѣгаютъ зависти отъ тѣхъ, кои ихъ ниже. Давно горѣлъ я желанїемъ найти случай торжественно изъявить Вамъ кроющуюся во глубинѣ сердца моего должную благодарность, яко досточтимому моему Меценату; но по сїе время лишенъ былъ сея щастливыя для меня минуты.

И такъ, будучи подвигнутъ Вами къ сему переводу, почту себя щастливымъ, естьли удостоите принять сїе слабое, но усердное приношенїе съ тою же благосклонностїю, съ коею принимали нѣкогда и самаго переводившаго. Я же

вящимЪ почту для себя награжденіемЪ за труды мои, естьли сія книжка принесетЪ ту пользу возпитавшему меня училищу, какую, учрежденная Коммисія для разсмотренія образа ученія, вЪ избраніи сего сочинителя, себѣ предполагала. Утѣшаясь столь лѣстными и возхитительными для меня мыслями, есмь и пребуду,

ВАШЕГО ВЫСОКОПРЕВОЗХОДИТЕЛЬСТВА,

МИЛОСТИВАГО ГОСУДАРЯ,

всепокорнѣйшій и преданнѣйшій слуга

трудившійся вЪ переводѣ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Сочинитель сего курса Г. Безу почитается всемъ ученымъ свѣтомъ лучшимъ и достаточнѣйшимъ писателемъ для готовящихся служить на стихіи удобьпреклоннаго ко гнѣву грознаго Нептуна. Основы его Геометріи безъ сомнѣнія очень достаточны къ уразумѣнію всѣхъ вышшихъ частей Математики, нужныхъ кораблевожденію; но какъ находятся въ немъ нѣкоторыя правила, а особливо въ измѣреніи поверхностей и толстотъ тѣлъ, у насъ неупотребительныя, сего ради принужденъ я былъ перемѣнить ихъ на образъ, коимъ мы вычисляемъ площади и толстоты тѣлъ, и положить свои для сего примѣры. Правда, желалъ я учинить тоже и при всякой его проблемѣ, кои обыкновенно у него безъ примѣровъ; но признаюсь, много мнѣ въ семъ возпрепятствовала перемѣна мѣста и новая для меня должность, требующая почти всегдашнихъ моихъ занятій. По сему, естьли найдутся какія либо и погрѣшности, прошу благосклонныхъ читателей оныя извинить, не яко произшедшія отъ небреженія, но отъ многихъ моихъ занятій.

ОГЛАВЛЕНІЕ

ОТДѢЛЪ ПЕРЬВЫЙ.

ОТДѢЛЪ ВТОРЫЙ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

)(

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРІИ.

1. Пространство тѣлами занимаемое, всегда имѣетъ три измѣренія: длину, ширину и толщину или глубину.

Хотя сіи три измѣренія находятся всегда вмѣстѣ во всемъ томъ, что есть тѣло, однако мы довольно часто отдѣляемъ ихъ умственно. На примѣръ: когда мы думаемъ о глубинѣ какой-либо рѣки или рейда, и проч: тогда не занимаемся ихъ длиною и шириною, а только глубиною. Подобно, когда разсуждаемъ о количествѣ вѣтра, кое какой-либо парусъ вмѣстить въ себя можетъ, тогда думаемъ только о длинѣ и ширинѣ паруса, ни мало не мысля о его толстотѣ.

И такъ различимъ сіи три рода протяженія, а именно:

Протяженіе въ одну длину только, назовемъ линеею;

Протяженіе въ длину и ширину только, наименуемъ поверхностію;

Наконецъ, протяженіе въ длину, ширину и толщину будемъ называть тѣломъ.

Мы будемъ изслѣдывать свойства сихъ трехъ родовъ протяженій одно за другимъ; и сей-то есть предметъ науки называемой геометріею.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

О линеяхъ.

2. Концы линей называются точками. Симъ именемъ называемъ также мѣста, на коихъ линея пересѣчена или на коихъ линеи встрѣчаются.

Можно на точку смотрѣть какъ на часть протяженія имѣющаго безконечно мало длины, ширины и толщины.

Слѣдъ точки движущейся и направляющейся всегда къ одной и тойже точкѣ, называется прямою линеею. Оная есть самое кратчайшее разстояніе между двумя точками, на прим: ав (фиг. 1) есть прямая линея.

Напротивъ того, кривою линеею называемъ слѣдъ точки, коя въ своемъ движеніи отъ прямой линеи уклоняется безпредѣльно мало при каждой ступени.

Изъ сего можно видѣть, что видъ прямыхъ линей есть только одинъ; но кривыхъ безконечное множество.

3. Дабы провести на бумагѣ небольшую прямую линею отъ одной точки до другой, какъ отъ а до в (фиг. 1), обыкновенно употребляютъ линейку, кою прикладываютъ къ точкамъ а и в въ равномъ отъ обѣихъ отстояніи, и ведутъ карандашемъ или перомъ подлѣ приложенной линейки, чрезъ что и назначаютъ линею ав.

Но когда потребно провесть линею довольно длинную, тогда прикрѣпляютъ въ точкѣ а конецъ нити, натертой мѣломъ, и, положивъ другой конецъ ея на точку в, приподымаютъ нѣсколько нить и опускаютъ: удареніемъ сея нити о поверхность, назначается желаемая прямая линея.

Когда же случится проводить линею очень великую, коей однако концы могутъ быть видимы одинъ отъ другаго: тогда довольно будетъ назначить между сими предѣлами нѣкое число точекъ сея линеи. На прим. случилось бы приводить что нибудь въ линїю на землѣ, тогда въ одномъ изъ предѣловъ, какъ в (ф. 2), поставляютъ колошекъ или сошку вд, который помощїю отвѣса устанавливаютъ, сколько возможно прямо; такимъ же образомъ втыкаютъ и другой колошекъ въ точкѣ а; и ставъ одинъ при семъ концѣ а, велитъ поставлять по одиначкѣ многїе другїе колошки въ разныхъ точкахъ с, с и проч. между а и в; потомъ приложивъ глазъ свой сколько возможно ближе къ колошку ад, смотритъ на колошекъ вд. Естьли всѣ поставляемые колошки, какъ сд, закрываютъ вд, тогда опредѣленныя такимъ образомъ точки с. с. с, и проч. суть всѣ *въ прямой линїи ав*; естьлижъ предѣлы а и в невидны одинъ отъ другаго, тогда употребляемъ средства, о коихъ покажемъ въ послѣдованїи.

4. Линеи измѣряемы бываютъ другими линеями; но, вообще, обыкновенная мѣра линей есть прямая линея. Измѣрять прямую или кривую линею, или какое либо разстоянїе, есть ничто иное, какъ сыскать сколько разъ сїя линея или разстоянїе содержитъ въ себѣ извѣстную и опредѣленную прямую, кою почитаютъ тогда уже единицею. Сїя единица совершенно произвольная; по чему много находится различныхъ мѣръ въ разсужденїи линеи. Не смотря на сажень и ея части, коихъ раздѣленїя показали мы въ Ариѳметикѣ, употребляемъ еще шагъ обыкновенной, шагъ геометрической, маховую сажень, и проч. для измѣренїя малыхъ протяженїй; версту, милю, лигу, и проч. для большихъ.

Шагъ обыкновенный состоитъ изъ $2\frac{1}{2}$ футъ.

Шагъ геометрическій, который иначе называютъ двойнымъ, состоитъ изъ 5 ти футъ.

Сажень маховая изъ 5 ти футъ. Въ мореплаваніи маховыми саженями щитаютъ долготы веревокъ, и глубины измѣряемыя лотомъ.

Лига состоитъ изъ извѣстнаго числа туазъ или геометрическихъ шаговъ. Морская лига изъ 2853 туазъ. Миля, верста, и проч. суть также мѣры до пути надлежащія, коихъ величина, такъ какъ и лиги, не есть одинакова во всѣхъ земляхъ, какъ по тому, что каждая изъ сихъ родовъ мѣръ не заключаетъ въ себѣ тогоже числа единицъ, т. е. тогоже числа шаговъ или туазъ или футъ, и проч. такъ и по тому, что футъ, служащій единицею симъ туазамъ или шагамъ, не вездѣ одинаковой величины *.

5. Дабы облегчить уразумѣніе того, что будемъ говорить о линеяхъ, мы положимъ, что фигуры, въ коихъ мы объ оныхъ *разсуждать* станемъ, изображены на поверхности плоской; а симъ именемъ называютъ такую поверхность, къ коей можно приложить прямую линею точно и вездѣ.

6. Изъ всѣхъ кривыхъ линей въ сихъ основахъ мы будемъ разсуждать только объ одной линеи, а именно, объ окружности круга. Такъ называется кривая линея BCFDG (ф. 3), коея всѣ точки равно отстоятъ отъ точки A, взятой на тойже плоскости, на коей сія окружность начерчена. Точка сія A, именуется центромъ; прямыя же линеи AB, AC, AF, и проч. проводимыя

* Сіи мѣры употребляются во Французскомъ флотѣ, коихъ футъ больше Англійскаго: въ Россійскомъ же употребительны, маховая сажень, состоящая изъ 6 Англійскихъ футъ и Италіанская миля. Какимъ образомъ сравниваются разныхъ земель мѣры, то показываютъ въ ариѳметикѣ.

отъ сей точки до окружности, называются *радїусами*, кои всѣ равны между собою, поелику они измѣряютъ разстоянїе отъ центра до каждой точки окружности.

Линеи, какъ BD, проходящїя чрезъ центръ, и ограниченныя по обѣ его стороны окружностїю, называются *дїаметрами*; и какъ каждой изъ нихъ состоитъ изъ двухъ радїусовъ, слѣдственно и всѣ дїаметры тогоже круга равны. Сверхъ сего явствуетъ, что каждой дїаметръ раздѣляетъ какъ кругъ такъ и окружность на двѣ равныя части; ибо, представя себѣ, что кругъ перегнутъ на самомъ дїаметрѣ BD, всякъ усмотрѣть можетъ, что всѣ точки окружности BGD долженствуютъ упасть на точки окружности BCED; въ противномъ случаѣ были бы такїя точки окружности, кои въ неравномъ разстоянїи отъ центра.

Части окружности, какъ BC, CE, ED и проч. *называются дугами; заключенную же поверхность въ окружности BCFDGB именуютъ кругомъ.*

Прямая, какъ DF, проводимая отъ одного конца дуги D до другаго F, называется *хордою* или *стягающею* сея дуги.

7. Легко видѣть можно, что **равныя хорды тогоже круга, или равныхъ, стягаютъ равныя дуги, и обратно.**

Ибо, ежели хорда DG равна хордѣ DF, то представя, что она и съ дугою своею будетъ положена на DF, удобно видѣть можно, что, когда точка D у нихъ общая, и точка G упадетъ на точку F, и всѣ точки дуги DG упадутъ на точки дуги DF: понеже, естьли бы одна точка изъ нихъ не упала на дугу DF, то бы не всѣ ся точки находились въ равномъ разстоянїи отъ центра A.

8. Всѣ согласились раздѣлять всякую окружность круга, малую или большую, на 360 равныхъ частей, изъ коихъ каждая называется градусомъ; каждый же градусъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ минутами; каждую минуту на 60 равныхъ частей, именуемыхъ секундами; и продолжая таковое дѣленїе каждой шестидесятой части на 60, даютъ названїя по порядку: минуты, секунды, терцїи, кварты, квинты и проч.

Градусы означаются для сокращенїя такъ	O
минуты - - - - - - - -	I
секунды - - - - - - - -	II
терцїи - - - - - - - -	III
кварты - - - - - - - -	IV

и такъ далѣе.

И такъ, дабы назначить сокращенно 3 градуса, 24 минуты, 55 секундъ, пишутъ: $3^{\circ}. 24'. 55''$.

Сїе раздѣленїе окружности принято вообще; но для удобностей по разнымъ намѣренїямъ на практикѣ, введены въ нѣкоторыхъ частяхъ практической математики нѣкїя особливыя употребленїя въ образѣ щитанїя градусовъ и его частей. На прим: Астрономы щитаютъ градусы по 30, кои они называютъ знаками; то есть, когда потребно сощитать на примѣръ $66^{\circ}. 42'$, понеже сїе число заключаетъ въ себѣ дважды 30° и $6^{\circ}. 42'$, они бы сочли 2 знака и $6^{\circ}. 42'$, и написали бы $2^{з}. 6^{\circ}. 42'$.

Мореходцы, для употребленїя компаса раздѣляютъ окружность на 32 равныя части, изъ коихъ каждую называютъ румбомъ: почему каждая изъ сихъ частей есть 32 я часть 360° ти, т. е. содержитъ она въ себѣ $11^{\circ}. 15'$. И такъ, вмѣсто что бы сказать 45°, говорятъ 4 румба, поелику 4 раза $11^{\circ}. 15'$, дѣлаютъ 45°. Равнымъ

образомъ вмѣсто 18°. 27′ сказали бы, румбъ и 7°. 12′ вѣтра.

О углахъ и ихъ мѣрѣ.

9. Двѣ линеи АВ, АС встрѣчающїяся, могутъ сдѣлать отверстїе бо́льшее или ме́ньшее, какъ усмотрится въ фигурахъ 4. 5. 6.

Сїе отверстїе ВАС называютъ угломъ, и сей уголъ именуютъ прямолинейнымъ, криволинейнымъ и смѣшеннолинейнымъ, по линеямъ его обьемлющимъ, когда онѣ или обѣ прямыя, или обѣ кривыя, или одна изъ нихъ прямая, а другая кривая.

Мы не будемъ говорить теперь какъ только о углахъ прямолинейныхъ.

10. Дабы имѣть точное понятїе о углѣ прямолинейномъ, должно представить себѣ, что прямая АВ сперьва лежала на АС, и оборотилась около точки А (какъ одна ножка циркуля на его шалнерѣ или скрѣпкѣ), дабы придти въ положенїе АВ, въ коемъ она теперь находится. Количество отверстїя, сдѣланнаго обращенїемъ АВ, есть точно то, что называютъ угломъ.

Слѣдуя сему понятїю, удобно вообразить можно, что величина угла не зависитъ отъ величины сторонъ, такъ что уголъ обьемлемый прямыми АС, АВ (ф. 4), есть точно тотъ же, что и уголъ обьемлемый прямыми линеями АF и АЕ, кои суть только продолженїя первыхъ; и самымъ дѣломъ, линеи АВ и АЕ долженствовали сдѣлать тоже отверстїе, дабы придти въ теперешнее ихъ положенїе.

Точка А, на коей встрѣчаются двѣ линеи АВ, АС, называется вершиною угла; а сїи двѣ линеи АВ, АС, его сторонами.

Для названїя какого-либо угла употребляемъ три буквы, изъ коихъ одна означаетъ его верши-

му, а другія двѣ ставятся по сторонамъ его; и произнося сіи буквы полагаемъ всегда при вершинѣ находящуюся въ срединѣ. И такъ, что бы назвать уголъ содержащійся въ AB, AC, скажемъ уголъ BAC или CAB.

Сіе вниманіе особенно нужно, когда многіе углы находятся при тойже вершинѣ: ибо ежели бы сказали, на прим: просто уголъ A (въ 4. ф.), не можно бы было узнать, о коемъ изъ двухъ BAC или BAD говорятъ; но когда одинъ только уголъ находится, какъ (въ 4*. ф.), тогда можно сказать просто уголъ A, и называть его буквою при вершинѣ находящеюся.

11. Понеже уголъ BAC (ф. 4.) есть не иное что какъ отверстіе, кое сторона AB, обращаяся около точки A, долженствовала сдѣлать, дабы придти отъ положенія AC въ положеніе AB; и поелику каждая точка прямыя AB, какъ точка B, на прим. будучи всегда въ томъ же разстояніи отъ A, необходимо назначаетъ дугу круга, увеличивающуюся или уменьшающуюся, какъ самый уголъ увеличится или уменьшится: не несвойственно будетъ взять сію дугу мѣрою самаго угла. Но какъ каждая точка прямой AB описываетъ дугу разной длины: по чему не длину дуги брать должно мѣрою, а число градусовъ и его частей, кое всегда будетъ тоже въ каждой дугѣ, описанной каждою точкою прямыя AB: понеже всѣ ея точки, начиная, продолжая и кончая свои движенія, въ тоже время непремѣнно сдѣлаютъ тоже число ступеней: вся разность будетъ только въ томъ, что точки далѣе отстоящія отъ A, сдѣлаютъ бóльшія ступени. И такъ можемъ сказать, что

12. **Какой-либо уголъ BAC (ф. 4.) имѣетъ мѣрою число градусовъ и его частей дуги, находящейся между его сторонами, и описанной изъ его вершины, какъ изъ центра.**

И такъ, когда въ послѣдованіи будемъ говорить: такой-то уголъ имѣетъ мѣрою такую-то дугу: должно понимать, что мѣра его есть число градусовъ и его частей сея дуги.

13. Слѣдственно, дабы раздѣлить уголъ на многія равныя части, надобно будетъ раздѣлить только дугу служащую ему мѣрою, на столько равныхъ частей, и отъ точекъ сѣченія провесть прямыя до вершины сего угла. О раздѣленіи дугъ будемъ говорить ниже.

14. А чтобы сдѣлать уголъ равный другому, на прим: при точкѣ а линеи ас (ф. 4*) сдѣлать уголъ равный углу вас (ф. 4.), должно изъ точки а, какъ изъ центра, и произвольнымъ раствореніемъ циркула описать неопредѣленную дугу сЪ; потомъ положивъ конецъ циркула на вершину а даннаго угла вас, описать тѣмъ же раствореніемъ дугу вс содержимую двумя сторонами сего угла, и смѣривъ разстояніе отъ с до в, положить его отъ с на Ъ, что опредѣлитъ точку Ъ; чрезъ сію и точку а, проведя линею аЪ, получимъ уголъ Ъас, равный углу вас.

Самымъ дѣломъ уголъ Ъас имѣетъ мѣрою дугу Ъс (12), а вас дугу вс. Слѣдственно сіи двѣ дуги равны, понеже, принадлежа къ равнымъ кругамъ, имѣютъ сверхъ сего и хорды равныя (7): ибо разстояніе отъ Ъ до с сдѣлано тоже, что и отъ в до с.

15. Уголъ вас (ф. 5.) называется прямой, когда одна изъ его сторонъ ав не наклоняется ни къ сторонѣ ас, ни къ ея продолженію аd.

Острымъ угломъ называютъ, (ф. 4), когда одна изъ его сторонъ ав наклоняется больше къ его другой сторонѣ ас, нежели къ продолженію сея другой аd.

На конецъ, тупымъ называютъ тотъ (ф. 6), когда одна изъ его сторонъ ав наклоняется больше

къ продолженію другой стороны AC, нежели къ самой его сторонѣ.

16. Заключимъ изъ того, что было сказано (12) о мѣрѣ угловъ: 1 е, что прямой уголъ имѣетъ мѣрою 90°, острый меньше 90°, а тупой больше нежели 90°.

Ибо, ежели линея AE (ф. 3.) не наклоняется ни къ AB, ни къ ея продолженію AD, два угла BAE, DAE будутъ равны: и посему дуги BE и DE будучи ихъ мѣрою, будутъ также равны. Слѣдовательно сіи двѣ дуги, составляя купно полуокружность, дѣлаютъ вмѣстѣ 180°: почему каждая изъ нихъ есть 90°; а по сему и каждый изъ двухъ угловъ BAE, DAE будетъ имѣть по 90°.

Изъ сего явствуетъ, что уголъ BAC меньше, а BAF больше нежели 90°.

17. 2 е. Два угла BAC, BAD (ф. 4, 5 и 6), составляемые прямою AB, падающею на другую прямую CD, имѣютъ всегда 180°.

Ибо на точку A (ф. 4.) можно всегда смотрѣть какъ на центръ круга, коего CD есть тогда діаметръ. И такъ два угла BAC и BAD имѣютъ мѣрою двѣ дуги BC и BD, составляющія полуокружность, и будутъ посему имѣть вмѣстѣ 180°, или столько, сколько два прямые.

18. 3 е. Ежели отъ тойже точки A (ф. 3), будетъ проведено сколько нибудь прямыхъ AC, AE, AF, AD, AG, и проч: всѣ углы ими составленные, какъ BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, будутъ имѣть 360°: понеже они не займутъ болѣе окружности круга.

19. Таковые два угла, какъ BAC и BAD (ф. 4), кои взятые вмѣстѣ дѣлаютъ 180°, называются исполненіями (супплементами) одинъ другаго; посему BAC есть исполненіе угла BAD, а BAD исполненіе BAC: понеже одинъ изъ сихъ угловъ служитъ добавкомъ другому для сдѣланія 180°.

По чему равные углы будутъ имѣть равныя исполненія, и углы, имѣющіе равныя исполненія, будутъ равны.

20. Заключимъ изъ сего, что углы BAC, EAD (ф. 7), противулежащіе при вершинѣ и сдѣланные двумя прямыми BD и EC, суть равны.

Ибо какъ BAC такъ и EAD имѣютъ тоже исполненіе, т. е. уголъ CAD.

21. Дополненіемъ (комплементомъ) какого-либо угла или дуги называютъ то, чемъ сія дуга меньше или больше нежели 90°. И посему угла BAC (ф. 3) будетъ дополненіе CAE, а угла BAF дополненіе уголъ FAE. Слѣдовательно дополненіе дуги или угла есть не иное какъ то, что надлежитъ прибавить къ углу или дугѣ, или убавить, чтобъ было 90°.

Острые углы, имѣющіе равныя дополненія, *будутъ равны; тоже должно разумѣть и о тупыхъ. И обратно: равные углы имѣютъ равныя дополненія.*

Углы сіи встрѣчаются съ нами безпрестанно какъ въ теоріи, такъ и въ практикѣ. Въ послѣдованіи довольно будемъ имѣть случаевъ убѣдить себя, что они встрѣчаются съ нами при каждомъ шагѣ въ теоріи. Чтожъ касается до практики, замѣтимъ сіе, что посредствомъ угловъ разсуждаютъ о пути судна; ими различаютъ, на вѣтренной ли сторонѣ находится встрѣтившееся на морѣ судно, или на подвѣтренной; посредствомъ угловъ опредѣляютъ положенія предмѣтовъ однихъ во отношеніи къ другимъ; посредствомъ премѣненія угловъ составляемыхъ парусами и рулемъ съ килемъ судна, производятъ разныя его повороты, премѣняютъ его путь, и прибавляютъ или убавляютъ ему ходу. Сверхъ сего мѣрою сихъ же угловъ опредѣляютъ мѣсто судна на морѣ.

Инструментовъ, служащихъ для измѣренія угловъ, или для сдѣланія ихъ по потребностямъ нашимъ, находится довольно великое число. Покажемъ теперь главнѣйшіе изъ оныхъ.

22. Инструментъ представленный въ 8. ф. и называемый транспортиромъ, служитъ какъ для измѣренія угловъ на бумагѣ, такъ и для сдѣланія ихъ на оной по потребностямъ. Употребленіе его и удобно и часто. Онъ ни что иное, какъ полукружіе мѣдное или костяное, раздѣленное на 180°. Центръ его означенъ маленькою выемочкою с. Когда желаешь измѣрить уголъ, какъ вас (ф. 4, 5, 6, и проч), приложи центръ его с къ вершинѣ а измѣряемаго угла, и радіусъ св сего инструмента къ одной изъ сторонъ онаго ас; тогда сторона ав, продолженная, естьли потребно, покажетъ линеею раздѣленія сего инструмента, чрезъ кою сторона угла проходитъ, сколько градусовъ въ дугѣ транспортира содержимой между сторонами угла вас, и слѣдственно (12) сколько градусовъ въ самомъ углѣ вас.

Для сдѣланія угла какого-либо опредѣленнаго числа градусовъ посредствомъ того же инструмента, приложи радіусъ св сего инструмента къ линеи, коя должна быть стороною желаемому углу, такъ, чтобы центръ с былъ на точкѣ, коя должна быть вершиною сего угла; потомъ сыскавъ на раздѣленіи его число требуемыхъ градусовъ, замѣть на бумагѣ сію точку; чрезъ сію и вершину угла проведи прямую, коя и сдѣлаетъ съ перьвою искомый уголъ.

23. Для измѣренія угловъ на земли, употребляютъ инструментъ представленный въ (ф. 9); называютъ его графометромъ. Онъ состоитъ изъ полукружія раздѣленнаго на 180°, съ назначеніемъ и полуградусовъ, естьли величина его діаметра позволяетъ. Діаметръ dв прикрѣпленъ

къ инструменту; но діаметръ ес, называемый алидадомъ, прикрѣпленъ только въ центрѣ а, около коего можетъ обращаться и перейти концемъ своимъ с, всѣ раздѣленія инструмента. Каждый изъ сихъ двухъ діаметровъ имѣетъ при концахъ своихъ по мишенькѣ, сквозь кои смотрятъ на предметы. Сей инструментъ поставленъ на ножкѣ и можетъ наклоняемъ быть во всѣ стороны по потребностямъ, безъ малѣйшей перемѣны положенія ножки *.

Когда должно измѣрить уголъ составляемый двумя прямыми проведенными отъ точки а, гдѣ находишься, къ другимъ двумъ предметамъ f и g: поставляютъ центръ графометра въ точкѣ а, и направляютъ инструментъ такъ, чтобы смотря сквозь мишеньки прикрѣпленнаго діаметра dab, можно было видѣть одинъ изъ сихъ двухъ предметовъ f, и что бы въ тожъ время другой предметъ g находился на продолженіи плоскости инструмента, что дѣлается бо́льшимъ или ме́ньшимъ наклоненіемъ графометра; потомъ подвигаютъ алидаду ес, пока увидятъ предметъ g сквозь мишеньки е и с; дуга вс, заключаемая между двумя діаметрами, будетъ мѣра угла gaf.

Явствуетъ также изъ вышесказаннаго, какимъ образомъ можно составить на земли уголъ опредѣленнаго числа градусовъ. По большой части дѣлаютъ на широтѣ и при концѣ подвижнаго діаметра, раздѣленія, кои въ сходственность ихъ соотвѣтствія раздѣленіямъ самаго инструмента, служатъ къ познанію частей градуса по 5 минутъ или по 3.

* Наши землемѣры вмѣсто Графометра обыкновенно употребляютъ Астролябію, коей составъ и употребленія всякъ изъ учащихъ объяснить можетъ.

Сей инструментъ часто имѣетъ также при себѣ обыкновенный компасъ, который можно видѣть въ той же 9 фигурѣ.

Намагниченная стрѣлка, составляющая главной его членъ, поддерживается на самой срединѣ шпилькою, по коей она имѣетъ всевозможное обращеніе. И какъ свойство ея есть пребывать всегда въ томъ же положеніи, или возвращаться на оное, когда съ него сойдетъ (по крайности въ томъ же самомъ мѣстѣ и для довольно долгаго времени), съ пользою употребляютъ ея при таковыхъ инструментахъ для опредѣленія положенія предметовъ въ отношеніи къ кардинальнымъ точкамъ, или въ отношеніи къ линеи Норда и Зюйда, съ коею оное положеніе дѣлаетъ всегда тотъ же уголъ на томъ же самомъ мѣстѣ. Край бумажки, находящійся подъ стрѣлкою, раздѣленъ обыкновенно на 360° окружности. Когда обращаютъ инструментъ, стрѣлка, по своему свойству приходить въ тожъ положеніе, назначаетъ чрезъ сіе новое раздѣленіе, коему она соотвѣтствуетъ, на сколько градусовъ инструментъ обороченъ.

Обыкновенный компасъ употребляютъ и безъ графометра; но сіе употребленіе бываетъ только для того, дабы опредѣлить на черно точки подробностей какого либо плана или карты, коихъ главнѣйшія точки были уже назначены съ точностію, таковымъ образомъ, о коемъ покажемъ въ послѣдованіи.

24. Компасъ морской или пель-компасъ (ф. 10.) ни чѣмъ не различествуетъ отъ обыкновеннаго компаса, кромѣ того что повѣшенъ такъ, чтобы члены его, служащіе для измѣренія угловъ, всегда оставались горизонтальны. Когда употребляютъ его только для познанія направленія киля корабля, тогда называютъ его путевымъ компасомъ. Содержатъ его въ ящикѣ называе-

момъ нокшаусомъ, который поставляется на самой срединѣ широты корабля. Намагниченная стрѣлка не оставляется просто на шпилькѣ, какъ въ обыкновенномъ компасѣ, она бы подвержена была великому качанію; накладываютъ на нее слюду обрѣзанную кругло, подклѣиваютъ оную съ обѣихъ сторонъ бумагою, и назначаютъ на верьху лилею вѣтровъ, т. е. раздѣляютъ окружность на румбы. Слѣдственно удобно представить можно, что естьли бы корабль нѣсколько оборотился, стрѣлка, сохраняя всегда тоже положеніе, или приходя въ оное, не соотвѣтствовала бы той же точкѣ нокшауса. И такъ замѣтивъ румбъ соотвѣтствовавшій тому, который стрѣлка лишь показывала, можно узнать на сколько оныхъ корабль уклонился. И по сему оный компасъ можно употреблять для приведенія и постояннаго удержанія корабля въ томъ же направленіи.

Когда употребляютъ компасъ для снятія предметовъ, т. е. для познанія румбовъ, коимъ оные соотвѣтствуютъ, тогда называютъ его пель-компасомъ. Сіе названіе дано ему отъ другаго употребленія, о коемъ говорить не есть здѣсь приличное мѣсто. Тогда присовокупляютъ къ нему двѣ мишеньки A и B (ф. 10), сквозь кои смотрятъ на предметы, коихъ положеніе узнать желаютъ. На морѣ потребно имѣть двухъ смотрителей; одинъ что бы наводилъ пель-компасъ для усмотрѣнія предмета, а другой въ тожъ самое время примѣчалъ бы положеніе стрѣлки въ отношеніи къ линеи DE, коя есть нить протянутая перпендикулярно къ линеи умственно проведенной отъ A до B.

О перпендикулярахъ и наклонныхъ линеяхъ.

25. Сказали мы (15), что линея АВ (ф. 5), кoя не наклоняется ни къ АС ни къ АD, дѣлаетъ съ ними углы называемые прямыми.

Самая же линея АВ именуется перпендикуляромъ къ АС или DC, или къ AD.

Слѣдуя сему опредѣленїю, должны принять за очевидныя истинны три слѣдующїя предложенїя:

26. 1 е. Когда линея АВ (ф. 11) перпендикулярна къ другой CD, то и оная CD перпендикулярна къ АВ.

Ибо, когда АВ перпендикулярна къ CD, углы АЕС, AED равны; посему AED равенъ и ВЕС (20); слѣдственно и АЕС равенъ ВЕС; по чему и линея СЕ или CD не наклоняется ни къ АЕ ни къ ВЕ; слѣдовательно и перпендикулярна къ АВ.

27. 2 е. Отъ тойже точки Е, взятой на линеи CD, не можно возставить больше одной перпендикулярной къ сей линеи.

28. 3 е. И отъ той же точки А, взятой внѣ линеи CD, не можно опустить больше одной перпендикулярной къ сей линеи.

Ибо въ одномъ только случаѣ линея проходящая чрезъ точку Е или точку А можетъ не наклоняться ни къ ED ни къ ЕС.

29. Линеи проведенныя отъ точки А и находящїяся въ равномъ разстоянїи отъ перпендикуляра, будутъ равны; и чѣмъ далѣе отъ него отстоятъ, тѣмъ будутъ больше; и посему перпендикуляръ есть самая кратчайшая изъ всѣхъ.

Положимъ, что EG равна EF; и представимъ, что фигура AEG оборочена на фигуру AEF: явствуетъ, что при общей линеи АЕ, и когда уголъ

AEG равенъ углу AEF, линея EG ляжетъ на EF, и точка G упадетъ на точку F, поелику EG полагается равна EF; слѣдовательно и AG ляжетъ по AF; а посему и равны будутъ. Чтоже надлежитъ до второй части предложенія, очевидно, что точка C линеи CE, отстоя далѣе отъ AB, нежели точка F той же CE, необходимо будетъ она дальше отъ какой бы то ни было точки линеи AB, нежели F отъ той же самой точки; посему AC больше AF; слѣдовательно и перпендикуляръ есть самая кратчайшая изъ всѣхъ.

30. Линеи AF, AC, AG называются наклонными въ отношеніи къ перпендикуляру AE и линеи CD; и вообще, наклонная линея къ другой есть та, коя съ сею другою дѣлаетъ или острый или тупой уголъ.

31. Поелику (29) наклонныя AF, AG равны, когда находятся въ равномъ разстояніи отъ перпендикуляра, изъ сего должно заключить, что, когда линея перпендикулярна къ другой на срединѣ E линеи FG, каждая изъ ея точекъ столько же отстоитъ отъ конца F, сколько и отъ G. Ибо, что было сказано о точкѣ A, равномѣрно принадлежитъ ко всякой другой точкѣ линеи AE или AB.

32. Не меньше очевидно, что только точки перпендикуляра AE на срединѣ FG могутъ быть въ равномъ разстояніи отъ F и G: ибо всякая точка, коя будетъ на правой или на лѣвой сторонѣ перпендикуляра, очевидно будетъ ближе къ одной изъ ея точекъ, нежели къ другой.

И такъ, чтобы линея была перпендикулярна къ другой, довлѣетъ, естьли она пройдетъ чрезъ двѣ точки, находящіяся въ равномъ разстояніи отъ двухъ точекъ, взятыхъ на сей другой.

33. Заключимъ изъ сего 1е, дабы возстановить перпендикуляръ на срединѣ линеи AB (ф.12), должно поставить конецъ циркула въ точкѣ B, и раствореніемъ большимъ половины прямыя AB написать дугу IK; потомъ поставить ножку циркула въ A, и тѣмъ же раствореніемъ написать дугу LM, пересѣкающую первую на C, коя будетъ въ равномъ разстояніи отъ A и B. Потомъ такимъ же образомъ опредѣли и другую точку D, внизу или вверху прямыя AB, тѣмъ же или другимъ раствореніемъ циркула. Послѣ сего проведи чрезъ сіи двѣ точки C и D прямую CD, которая и будетъ перпендикулярна на срединѣ AB.

34. 2е. Ежели отъ точки E внѣ линеи AB (ф. 13) потребно будетъ провести перпендикулярную къ ней; поставь конецъ циркула на E, и отверстіемъ большимъ самаго кратчайшаго къ AB, другимъ концомъ опиши двѣ маленькія дуги, сѣкущія AB на точкахъ C и D; потомъ изъ сихъ двухъ точекъ какъ изъ центровъ и раствореніемъ циркула большимъ половины CD, опиши двѣ дуги сѣкущіяся на точкѣ F; чрезъ сію и точку E проведи линею EF, которая и будетъ перпендикулярна къ AB (32): понеже будутъ у нея двѣ точки E и F въ равномъ разстояніи каждая отъ двухъ точекъ C и D прямыя AB.

35. Ежели точка E, чрезъ кою проходить должно перпендикуляру, будетъ на самой линеи AB, поступай такимъ же образомъ: смотри ф.14.

На конецъ, естьли бы точка E находилася въ такомъ мѣстѣ, что неудобно бы было назначить, кромѣ одной точки изъ C и D, продолжи тогда AB и поступай какъ выше сказано: смотри ф. 15 и 16, изъ коихъ послѣдняя служитъ примѣромъ, когда должно возставить перпендикуляръ при концѣ прямыя AB.

О параллельныхъ.

36. Двѣ прямыя, проведенныя на той же плоскости, называются параллельными, когда онѣ никогда не могутъ встрѣтиться, сколь бы далеко продолжены ни были.

Слѣдственно двѣ параллельныя линеи не дѣлаютъ угла.

Посему двѣ параллельныя линеи вездѣ находятся въ равномъ одна отъ другой разстояніи: ибо явно, естьли бы въ одномъ мѣстѣ нашлись онѣ ближе одна къ другой, нежели въ другомъ, были бы онѣ наклонны одна къ другой; почему могли бы на конецъ и встрѣтиться.

По сихъ познаніяхъ можно утвердить слѣдующія пять предложеній:

37. 1е. Когда двѣ параллельныя линеи AB и CD (ф. 17) пересѣкаются третіею EF, (кою называютъ тогда *сѣкущею*) углы BGE, DHE, или AGH, CHF, кои онѣ дѣлаютъ по туже сторону съ сею линеею, суть равны. Ибо линеи AB и CD, не имѣя никакого между собою наклоненія (36), необходимо долженствуютъ быть равно наклонными по одну и тужъ сторону каждая въ разсужденіи всякой линеи, съ коею ихъ сравнивать будутъ.

38. 2е. Углы AGH, GHD суть равны. Ибо лишь теперь видѣли, что AGH равенъ CHF: посему CHF (20) равенъ GHD: слѣдственно и AGH равенъ GHD.

39. 3е. Углы BGE, CHF суть также равны. Ибо уголъ BGE равенъ углу AGH (20); по сему, какъ показано было въ (37), что AGH равенъ CHF, слѣдовательно BGE равенъ CHF.

40. 4е. Углы BGH, DHG или AGH, CHG, суть исполненія одинъ другаго: понеже BGH есть исполненіе угла BGE, который (37) равенъ углу DHG.

41. 5е. Углы BGE, DHF или AGE, CHF суть исполненія один другаго: ибо DHF исполняется углом DHG, который (37) равен углу BGE.

42. Каждое из сих пяти свойств будет всегда существовать, когда двѣ параллельныя линеи пересѣкаются третіею и взаимно: когда двѣ прямыя встрѣтятся с третіею и будут имѣть одно из сих пяти свойств, должно заключить, что онѣ параллельны; сіе и доказывается точно таким же образом.

Сим углам, коих свойства лишь теперь мы изслѣдовали, даны нѣкоторыя имена для укрѣпленія в памяти свойств оных. Углы BGE, FHC называются внѣ поперечными, понеже находятся они по разныя стороны линеи EF и оба внѣ параллельных. Углы AGH, GHD называются внутренно поперечными, поелику, находясь по разныя стороны линеи EF, суть оба между параллельными. Углы BGH, DHG называются внутренными по тужь сторону, понеже они между параллельными и по тужь сторону сѣкущей EF. На конец, углы BGE, DHF именуются внѣшними по тужь сторону, понеже они внѣ параллельных и по тужь сторону сѣкущей.

43. Из свойств, кои мы лишь доказали, можно заключить 1е, что, ежели два угла ABC, DEF (ф. 18) обращенные в одну сторону, имѣют стороны параллельны, будут оные равны. Ибо, когда представим, что DE продолжена, пока встрѣтится с BC на G, углы ABC, DGC будут равны (37), и для той же причины угол DGC будет равен углу DEF; слѣдственно угол ABC равен углу DEF.

44. 2е. Дабы от данной точки C провесть CD параллельную (ф. 19) к линеи AB; должно от точки C провесть по произволенію неопредѣленную линею CEF, которая бы пересѣкла

линею AB на какой либо точкѣ E; и чрезъ C, какъ показано (14), должно протянуть линею CD, дѣлающую съ CE уголъ ECD равный углу FEB, который оная CE дѣлаетъ съ AB: линея CD проведенная такимъ образомъ, будетъ параллельна къ AB (37).

На конецъ каждое изъ пяти свойствъ лишь только утвержденныхъ выше, можетъ снабдить насъ средствомъ для проведенія параллельныя.

45. Перпендикуляры и параллельныя, о коихъ мы говоримъ по порядку, суть въ великомъ употребленіи во всѣхъ частяхъ практической математики. Перпендикуляры нужны въ измѣреніи поверхностей и толстотъ тѣлъ; они встрѣчаются при всякомъ случаѣ въ корабельной архитектурѣ. Какъ прямой уголъ удобнѣе составлять, стараются, что бы составъ фигуръ зависѣлъ сколько возможно лучше отъ перпендикуляровъ, нежели отъ всякой другой линеи.

Параллельныя, сверьхъ ихъ великаго употребленія въ теоріи, для удобнѣйшаго доказанія многихъ предложеній, служатъ основаніемъ многимъ полезнымъ дѣйствіямъ.

Часто употребляютъ ихъ въ мореплаваніи особливо, дабы назначить на морскихъ картахъ переплытой путь корабля, что и называютъ назначить мѣсто. Въ послѣдованіи поговоримъ о семъ побольше.

О прямыхъ въ отношеніи къ окружности круга, и какія оныя окружности имѣютъ отношенія однѣ къ другимъ.

46. Единообразная кривизна круга даетъ право заключить безъ дальнѣйшихъ доказаній....

1 е. Что прямая не можетъ встрѣтиться съ окружностію, какъ только на двухъ точкахъ.

2 е, Что въ томъ же полукружіи, самая бо́льшая хорда подтягаетъ всегда самую бо́льшую дугу: и обратно.

Вообще называютъ сѣкущею (ф. 20) всякую линею какъ DE, коя пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ, и которая частію находится внѣ онаго: а прикасательною называется, коя только дотрогивается окружности круга: какъ AB.

47. Прикасательная встрѣчается съ окружностію только на одной точкѣ. Ибо ежели бы встрѣтилась на двухъ, вошла бы въ кругъ: понеже отъ сихъ двухъ точекъ можно бы было провести два радіуса или двѣ равныя линеи, между коими всегда можно вообразить перпендикулярную къ линеи, соединяющей сіи двѣ точки; и какъ сей перпендикуляръ (29) есть короче нежели каждый изъ двухъ радіусовъ, можно видѣть, что прикасательная имѣла бы нѣсколько точекъ ближе къ центру, нежели тѣ, на коихъ она встрѣчаетъ кругъ; по сему была бы она въ кругѣ: что противно опредѣленію, лишь теперь нами объ ней данному.

Поелику прикасательная имѣетъ одну только точку общую съ кругомъ, слѣдуетъ, что радіусъ CA (ф. 21), доходящій до точки касанія, есть кратчайшій изъ всѣхъ линей проводимыхъ до прикасательной; и по сему (29) перпендикуляренъ ко прикасательной. И такъ обратно прикасающаяся къ кругу въ одной какой либо точкѣ A, перпендикулярна къ концу радіуса CA, проходящему чрезъ сію точку.

48. Слѣдовательно, явствуетъ, что бы провести прикасательную къ кругу, отъ данной точки A, должно къ сей точкѣ провесть радіусъ CA, и вставить при концѣ его перпендикуляръ, какъ показано въ (35).

49. По чему, ежели многiе круги (ф. 22), имѣютъ ихъ центры на той же прямой CA, и всѣ проходятъ чрезъ туже точку A, всѣ они будутъ имѣть общую прикасательную линею TG, перпендикулярную къ CA, и будутъ дотрогиваться одинъ другаго.

50. И такъ, чтобъ написать кругъ опредѣленной величины, прикасающiйся данному кругу BAD (ф. 23.) въ данной точкѣ A, должно отъ центра C къ точкѣ A провесть радiусъ CA и продолжить его неопредѣленно; потомъ отъ точки A къ T или къ V (смотря, потребно ли, чтобъ одинъ изъ круговъ заключалъ въ себѣ другой или нѣтъ), положить величину радiуса другаго круга; послѣ чего центромъ T или V и радiусомъ TA или VA написать окружность EF.

51. Перпендикулярная, возставленная на срединѣ какой либо хорды, проходитъ всегда чрезъ центръ круга и чрезъ средину дуги подтягаемой сею хордою (ф. 24.)

Ибо она должна пройти чрезъ всѣ точки равноотстоящiя отъ концовъ A и B (32); и такъ очевидно, что центръ равно удаленъ отъ концовъ A и B, кои суть двѣ точки окружности: посему она проходитъ и чрезъ центръ.

Не меньше явно, что она пройдетъ и чрезъ средину дуги; ибо, ежели E есть средина дуги, и поелику равныя дуги AE, BE имѣютъ равныя хорды (7), точка E находится въ равномъ разстоянiи отъ A и B: посему перпендикулярная долженствуетъ пройти чрезъ точку E.

52. Когда центръ, средина дуги, и средина хорды находятся всѣ на той же прямой, линея, проходящая чрезъ двѣ изъ нихъ, пройдетъ всегда и чрезъ третiю.

И какъ не можно провесть кромѣ одной перпендикулярной на срединѣ хорды, должно еще

заключить, что ежели перпендикулярная къ хордѣ пройдетъ хотя чрезъ одну изъ сихъ трехъ точекъ, пройдетъ необходимо и чрезъ другія двѣ.

Изъ сихъ свойствъ можно заключить,

53. 1е: Способъ раздѣлять уголъ или дугу на двѣ равныя части.

Дабы раздѣлить уголъ BAC (ф. 25) на двѣ равныя части, изъ вершины его A, какъ изъ центра, и произвольнымъ радіусомъ опиши дугу DE; потомъ изъ точекъ D и E попеременно, какъ изъ центровъ, и однимъ и тѣмъ же радіусомъ опиши двѣ дуги, сѣкущіяся на точкѣ G, чрезъ кою и точку A проведи AG, которая по (32) будучи перпендикулярна на срединѣ хорды DE, раздѣлитъ дугу DIE на двѣ равныя части (51), слѣдственно и уголъ BAC; понеже два частные угла BAG, CAG имѣютъ мѣрою двѣ равныя дуги DJ, EJ.

54. 2е. Способъ описывать окружность круга чрезъ три данныя точки, кои не суть на одной прямой.

Да будутъ A, B, C (ф. 26) сіи три точки данныя: проведи прямыя AB, BC, кои будутъ двѣ хорды искомаго круга. Возставь перпендикуляръ (33) на срединѣ AB, тоже сдѣлай и на срединѣ BC: точка I, гдѣ сіи перпендикуляры встрѣтятся, будетъ центръ. Ибо онъ долженъ быть и на DE (51), и по той же причинѣ на FG: слѣдственно онъ долженъ быть на ихъ пересѣченіи I, кое и есть одна только точка, которая общая симъ двумъ линеямъ.

55. Ежели бы потребовалось, сыскать центръ круга, или дуги уже написанной, очевидно, что довольно будетъ назначить три точки по изволенію на сей дугѣ, и поступить, какъ выше показано.

56. И понеже одна только точка I, коя удовлетворяетъ сему вопросу, должно изъ сего заключить, что чрезъ три данныя точки не можно провесть кромѣ одного круга; почему и двѣ окружности не пересѣкутся на трехъ точкахъ, не закрывъ одна другую.

57. 3 е. Способъ проводить чрезъ данную точку в (ф. 27 и 28) окружность круга, прикасающуюся къ другой окружности на данной точкѣ а.

Для сего должно чрезъ центръ с данной окружности, и чрезъ точку а, на коей она должна прикоснуться, провесть радїусъ са, который продолживъ по ту или другую сторону по потребности, соединить точку а съ точкою в, чрезъ кою желаютъ провесть искомую окружность, и на срединѣ ав воставить перпендикуляръ мn, сѣкущїй ас или ея продолженїе на точкѣ d. Сїя d будетъ центръ; а аd или вd радїусъ искомаго круга: *ибо, послику окружность*, которую хотятъ описать, долженствуетъ пройти чрезъ точки а и в, центръ ея долженъ быть на мn, (51). Сверхъ сего, понеже сїя же самая окружность должна прикоснуться на а, центръ ея долженствуетъ быть на са (49) или на ея продолженїи: и посему находится онъ на точкѣ сѣченїя линей са и мn.

58. Естьли бы вмѣсто окружности круга, была прямая, къ коей должно бы было провести обводъ круга, проходящїй чрезъ точку в, и прикасающїйся на данной точкѣ а (ф. 29), дѣйствїе было бы тоже, съ тою только разностїю, что линея ас была бы перпендикулярная, возставленная въ точкѣ а къ сей прямой.

59. 4 е. Двѣ параллельныя хорды ав, cd (ф. 30) заключаютъ между собою равныя дуги ас, вd.

Ибо перпендикуляръ GI, опущенный изъ центра G на AB, долженъ раздѣлить (51) на двѣ равныя части каждую изъ дугъ AIB, CID; понеже онъ въ тожъ время будетъ также перпендикуляромъ и къ AB и къ ея параллельной CD; посему ежели отъ равныхъ дугъ AI, BI отъимутъ равныя дуги CI, DI, остальныя AC, BD должны быть равны.

Заключимъ изъ сего, что когда прикасательная HK параллельна къ хордѣ AB, точка прикосновенія I будетъ на срединѣ дуги AIB.

60. Предложенія, кои мы основали, (50 57 и 58) относятся къ корабельной Архитектурѣ или къ строенію кораблей. Часто въ сей наукѣ требуются дуги, долженствующія или взаимно касаться или касать прямыя и проходить чрезъ данныя точки. Изъ сказаннаго нами легче можно уразумѣть нѣкоторыя средства тамъ для сего предписанныя. Въ гражданской Архитектурѣ также довольно часто употребляютъ прикасающіяся дуги.

61. Послѣднее предложеніе, кое мы лишь доказали, можетъ служить, кромѣ другихъ употребленій, къ тому, чтобы проводить параллельную къ данной линеи.

О углахъ въ кругѣ.

62. Выше мы видѣли (12), какая вообще мѣра угловъ. Что мы намѣреваемся предложить здѣсь, то не есть новое средство для ихъ измѣренія, но дабы утвердить нѣкоторыя свойства, могущія быть намъ полезными въ послѣдованіи, какъ для нѣкоторыхъ дѣйствій, такъ и для облегченія доказательствъ.

63. Уголъ MAN (ф. 31 и 32), имѣющій вершину при окружности и составленный двумя хордами или прикасательною и хордою,

имѣетъ мѣрою всегда половину дуги BFED, содержимой между его сторонами.

Чрезъ центръ C проведи діаметръ FH, параллельный къ сторонѣ AM; а діаметръ GE параллельный къ сторонѣ AN: уголъ MAN (13) равенъ углу FCE: почему онъ и мѣру будетъ имѣть ту же, кою уголъ при центрѣ, т. е. мѣра его будетъ дуга FE: слѣдственно должно только показать, что дуга FE есть половина дуги BFED. И такъ, понеже AM параллельна къ HF, дуга BF равна AH (59); а поелику и AN параллельна къ GE, дуга ED равна дугѣ AG; посему и ED съ BF будутъ равны AG съ AH, т. е. GH; но GH, какъ мѣра угла GCH, должна быть равна FE, мѣрѣ угла FCE, который равенъ (20) GCH; посему BF съ ED равны FE; слѣдовательно и FE есть половина дуги BFED: и такъ уголъ MAN имѣетъ мѣрою половину дуги BFED, содержимой между своими сторонами.

Въ семъ доказательствѣ подлагаютъ, что центръ находится между сторонами угла или на одной изъ его сторонъ; но ежели центръ будетъ внѣ его сторонъ, какъ случается въ углѣ MAL (ф. 32), не меньше же будетъ справедливо, что половина дуги BL, содержимая между его сторонами, будетъ мѣрою сего угла. Ибо ежели вообразимъ прикасательную AN, уголъ BAL будетъ равенъ LAN безъ MAN: и посему мѣра его будетъ разность мѣръ сихъ двухъ угловъ, т. е. (поелику центръ его находится между сторонами) половина LEA безъ половины BFA или половина BL.

64. И такъ 1е. Всѣ углы BAE, BCE, BDE (ф. 33) имѣющіе вершины ихъ при окружности, и стоящіе на той же дугѣ или равныхъ, будутъ равны.

Понеже каждый изъ нихъ будетъ имѣть мѣрою половину той же дуги BE (63).

65. 2 е. Всякой уголъ ВАС (ф. 34), имѣя вершину свою при окружности, и коего концы сторонъ будутъ на концахъ діаметра, будетъ прямой или 90°: ибо займетъ тогда между своими сторонами полуокружность ВОС, коя есть 180°; и какъ онъ долженъ имѣть мѣрою половину оныя (63), посему будетъ имѣть 90°.

66. Предложеніе, кое мы лишь только доказали (65), между многими другими употребленіями, имѣетъ слѣдующія два:

67. 1 е. Дабы возставить перпендикуляръ на концѣ В, линеи FВ (ф. 35); когда не можно ее довольно продолжить: то, что бы исполнить показанное въ (35) съ удобностію, поступай такимъ образомъ:

Изъ точки D, взятой по произволенію внѣ линеи FВ, и растворенiемъ равнымъ разстоянію DВ, опиши окружность АВСН, сѣкущую FВ на какой либо точкѣ А; чрезъ сію и центръ D проведи діаметръ АDС; отъ точки С, гдѣ сей діаметръ пересѣкаетъ окружность, проведи къ В линею СВ: оная будетъ перпендикулярна къ FВ. ибо уголъ СВА, составляемый ею съ FВ, имѣетъ вершину свою при окружности и концы сторонъ на концахъ діаметра АС; слѣдовательно сей уголъ есть прямый (65); посему СВ перпендикулярна къ FВ.

68. 2 е. Дабы отъ данной точки Е (ф. 36) внѣ круга АВD провесть прикасательную къ его окружности: Соедини центръ С съ точкою Е прямою СЕ: и на СЕ, какъ на діаметрѣ, напиши окружность САЕD, коя пересѣчетъ окружность АВD въ двухъ точкахъ А и D, чрезъ каждую изъ коихъ и чрезъ точку Е, проведши линеи DЕ и АЕ, получишь двѣ прикасательныя, кои только и можно провесть отъ точки Е къ окружности АВD.

Для убѣжденія себя въ томъ, что сіи линеи суть прикасательныя, должно только провести радіусы CD и CA; два угла CDE, CAE, имѣя ихъ вершины при окружности ACDE, и концы ихъ сторонъ на концахъ діаметра CE, будутъ слѣдственно прямые (65). Итакъ DE и AE перпендикулярны къ концамъ радіусовъ CD и CA; слѣдовательно по (47) сіи линеи и прикасаются на точкахъ D и A.

69. Естьли продолжить сторону BA (ф. 31.) неопредѣленно къ I, будетъ уголъ NAI, имѣющій также вершину свою при окружности: сей уголъ, несоставленный изъ двухъ хордъ, но только изъ одной хорды и продолженія другой, не будетъ имѣть мѣрою половину дуги AD, заключаемой между его сторонами; но половину суммы двухъ дугъ AD и AB, подтягаемыхъ стороною AD и продолженіемъ стороны AI: ибо углы DAI съ DAB, составляя два прямые, будутъ вмѣстѣ имѣть мѣрою полуокружность, а посему можно видѣть изъ (63), что DAB имѣетъ мѣрою половину DB; слѣдовательно DAI имѣетъ мѣрою половину AD и половину AB.

70. Уголъ BAC (ф. 37), коего вершина находится между центромъ и окружностію, имѣетъ мѣрою половину дуги BC, содержимой между его сторонами, вмѣстѣ съ половиною дуги DE, содержимой въ продолженіи сихъ же сторонъ.

Отъ точки D, гдѣ продолженная CA встрѣчается съ окружностію, проведи DF параллельную къ AB; уголъ BAC равенъ FDC (37), и будетъ посему имѣть ту же съ нимъ мѣру, т. е. половину дуги FBC (63), или (половину CB съ половиною дуги BF, или послику BF (59) равна DE) половину CB съ половиною DE.

71. Уголъ BAC (ф. 38), коего вершина внѣ круга, имѣетъ мѣрою половину впалой дуги

вс, безъ половины выпуклой ед, содержимыхъ между его сторонами.

Отъ точки d, на коей са встрѣчается съ окружностію, проведи df параллельную къ ав.

Уголъ вас равенъ fdc (37); посему мѣра ихъ будетъ таже, т. е. половина дуги cf или половина дуги св безъ половины дуги вf, или (поелику вf равна ed (59)) половина св безъ половины ed.

72. Посему явствуетъ, что, когда стороны угла заключаютъ между собою дугу окружности, и ежели сей уголъ имѣетъ мѣрою половину дуги содержимой между его сторонами, вершина онаго угла необходимо будетъ при окружности; ибо, естьли бы она была въ другомъ какомъ мѣстѣ, доказанныя предложенія (70 и 71) показали бы, что онъ не имѣетъ мѣрою половины сей дуги. И такъ, какъ бы ни былъ положенъ тотъ же уголъ, ежели стороны его (ф. 33) проходятъ всегда чрезъ тѣжъ точки окружности в и е, вершина его будетъ всегда на окружности. Посему, ежели двѣ линѣйки ам, аn (ф. 39) скрѣпленныя одна съ другою подвигались бы вмѣстѣ на тойже плоскости, безпрестанно прикасаясь къ двумъ утвержденнымъ точкамъ в и с, вершина его а описала бы окружность круга, который пройдетъ чрезъ двѣ точки в и с.

Сіе можетъ послужить, 1е: къ описанію круга, проходящаго чрезъ три данныя точки в, а, с (ф. 39), когда не льзя приближиться къ его центру. Должно будетъ соединить точку а съ точками в и с двумя линейками ам, аn; скрѣпить сіи двѣ линейки такъ, чтобъ одна не отходила отъ другой; потомъ оборачивая уголъ вас такъ, что бы линейки ам, аn всегда прикасались точкамъ в и с, вершина его а опишетъ желаемую окружность.

2 c. Къ описанію дуги круга, коя бы имѣла предложенное число градусовъ, и которая бы проходила чрезъ двѣ данныя точки в и с: что можетъ быть очень нужно въ практикѣ.

Для сдѣланія сего отъимемъ отъ 360, число градусовъ, кое сія дуга имѣть долженствуетъ, и взявъ половину остатка разтворимъ двѣ линейки такъ, чтобъ онѣ дѣлали уголъ равный сей половинѣ. Скрѣпивъ потомъ оныя двѣ линейки, и оборотивъ около двухъ утвержденныхъ точекъ в и с, дуга вас, кою вершина его опишетъ симъ обращеніемъ, будетъ желаемаго числа градусовъ.

Явствуетъ для чего дѣлаютъ уголъ вас равный половинѣ остатка: понеже онъ имѣетъ мѣрою половину вс, коя есть разность между цѣлою окружностію и дугою вас.

О прямыхъ, заключающихъ въ себѣ пространство.

73. *Самое меньшее число прямыхъ линей*, кои могутъ заключить въ себѣ пространство, есть три, и тогда сіе пространство называется прямолинѣйнымъ треугольникомъ или просто треугольникомъ. авс (ф. 40) есть треугольникъ; понеже онъ есть пространство, заключенное въ трехъ прямыхъ линеяхъ; или точнѣе, поелику сія фигура имѣетъ только три угла.

Явствуетъ, что во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ, всячески взятая, всегда больше третіей. ав съ вс, на примѣръ, больше ас: понеже ас, будучи прямая, проведенная отъ а до с, есть кратчайшее разстояніе между сими точками.

Треугольникъ, имѣющій всѣ три стороны равныя, называется равностороннымъ. (ф. 41).

А тотъ, коего двѣ только стороны равны, называется равнобедреннымъ (ф. 42).

У коего же всѣ три стороны не равны, называется разностороннымъ (ф. 40).

74. Сумма всѣхъ трехъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ или 180°.

Продолжи неопредѣленно сторону ас къ е (ф. 40) и представь, что линея сd параллельна къ ав.

Уголъ вас равенъ углу dсе (37), понеже линеи ав, сd параллельны. Уголъ авс равенъ углу всd по второму свойству параллельныхъ (38); слѣдовательно два угла вас и авс вмѣстѣ, равны угламъ всd и dсе, т. е. углу все; но все есть исполненіе (17 и 19) угла вса: по сему два угла вас и авс вмѣстѣ дѣлаютъ исполненіе угла вса; по сему и три сіи угла составляютъ 180°.

75. Доказательство лишь только данное нами, показываетъ въ тожъ время, что внѣшній уголъ все треугольника авс равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ вас и авс ему сопротивныхъ.

Заключимъ изъ того, что было сказано (74), 1 е. Прямолинейной треугольникъ имѣетъ только одинъ уголъ прямой: и тогда называютъ его прямоугольнымъ (ф. 43).

2 е. Тѣмъ паче, не можетъ онъ имѣть больше одного тупаго; въ семъ случаѣ называютъ его тупоугольнымъ (ф. 44).

3 е. Онъ можетъ имѣть всѣ три угла острые; тогда называютъ его остроугольнымъ (ф. 45).

4 е. Зная два угла треугольника или ихъ сумму только, можно узнать третій, когда отъимешь извѣстную сумму двухъ угловъ отъ 180°.

5 е. Когда два угла треугольника равны двумъ угламъ другаго, третій уголъ равенъ необходимо третьему: понеже каждые три угла каждаго треугольника равны 180°.

6 е. Два острые угла прямоугольнаго треугольника суть всегда дополненія одинъ

другаго (21). Ибо когда уже одинъ изъ угловъ треугольника имѣетъ 90°, для другихъ двухъ остается только 90°.

76. Выше видѣли мы (54), что всегда можно описать окружность круга около трехъ данныхъ точекъ, находящихся не на одной прямой: заключимъ изъ сего, что.....

Всегда можно провесть окружность круга чрезъ три вершины угловъ треугольника. Сїе называютъ описать кругъ около треугольника.

77. Изъ сего удобно заключить можно, 1 е: ежели два угла въ треугольникѣ равны, стороны имъ сопротивныя будутъ такъ же равны; и обратно, когда двѣ стороны треугольника равны, углы, противулежащїе имъ, будутъ равны.

Ибо проведши окружность чрезъ три угла A, B, C (ф. 46), ежели углы ABC, ACB равны, дуги ихъ ADC, AEB, коихъ половины служатъ имъ мѣрою (63), необходимо будутъ равны; слѣдственно (7) и хорды AC, AB будутъ равны. И обратно, ежели стороны AC, AB равны, дуги ихъ ADC, AEB будутъ равны; по сему и углы ABC, ACB, коихъ мѣра половина сихъ дугъ, будутъ равны.

И такъ три угла равносторонняго треугольника суть равны; слѣдственно каждый изъ нихъ есть треть 180° или имѣетъ въ себѣ 60°.

78. 2. Въ томъ же треугольникѣ ABC (ф. 47). Большая сторона противолежитъ большему углу, а меньшая меньшему, и обратно.

Ибо ежели уголъ ABC больше угла ACB, дуга AC будетъ больше дуги AB; посему и хорда AC больше хорды AB. Обратное сему доказывается такимъ же образомъ.

О равенствѣ треугольниковъ.

79. Множество находится предложенїй, коихъ доказательства основаны на равенствѣ извѣстныхъ треугольниковъ, о коихъ въ оныхъ разсуждаютъ; по сему не неприлично показать здѣсь признаки, по коимъ можно узнать сїе ихъ равенство. Числомъ ихъ находится три.

80. Два треугольника равны, когда у нихъ углы содержимые въ сторонахъ, равныхъ порознь, равны.

Т. е. Пусть уголъ в треугольника вас (ф. 48) будетъ равенъ углу е треугольника еdf (ф. 49); и сторона ав равна de; а сторона вс сторонѣ еf; то увѣриться, что сїи треугольники равны, можно слѣдующимъ образомъ:

Представь, что фигура авс положена на фигуру def такъ, что сторона ав лежитъ точно на равной ей de; то сторона вс упадетъ на еf, понеже уголъ в равенъ углу е; и точка с на точку f, поелику вс полагается равною еf. Когда же точка а находится на d, и с на f, явствуетъ, что и ас ляжетъ точно по df; слѣдовательно и сїи два треугольника соумѣщаются. И такъ, что бы сдѣлать треугольникъ, коего извѣстны двѣ стороны и уголъ содержимый: проведи прямую de (ф. 49), равную одной изъ сторонъ данныхъ, и сдѣлай на ней уголъ def (14) равный извѣстному; потомъ, сдѣлавъ еf равную другой извѣстной сторонѣ, проведи df; что и дастъ тебѣ желаемый треугольникъ.

81. Два треугольника равны, когда имѣютъ по одной равной сторонѣ, прилежащей двумъ равнымъ угламъ порознь, т. е.

Пусть сторона ав (ф. 48) будетъ равна сторонѣ de (ф. 49), уголъ в равенъ углу е, а уголъ а равенъ углу d.

Представь, что сторона AB положена точно на DE: BC упадетъ на EF, понеже уголъ B равенъ углу E. Подобнымъ образомъ, поелику уголъ A равенъ углу D, сторона AC ляжетъ на DF: по сему AC и BC встрѣтятся на точкѣ F: слѣдовательно и два треугольника равны.

И такъ, дабы составить треугольникъ, коего сторона и два прилежащïе ей угла извѣстны: проведи (ф. 49) прямую DE, равную извѣстной сторонѣ; при концахъ ея сдѣлай углы (14) E и D равные двумъ извѣстнымъ угламъ; тогда стороны EF, DF сихъ угловъ, встрѣтясь, опредѣлятъ желаемый треугольникъ.

82. Предложенïе показанное (81) можетъ служить къ доказанïю, что части AC, BD (ф. 50) двухъ параллельныхъ, содержимыя между другими двумя параллельными AB, CD, суть равны.

Опусти два перпендикуляра AE, BF: углы AEC, BFD будутъ равны: ибо они суть прямые. И понеже AC параллельна къ BD, а AE къ BF: уголъ EAC равенъ углу FBD (43); сверхъ сего AE равна BF (36). По сему и треугольники AEC, BFD равны, понеже имѣютъ они по равной сторонѣ, прилежащей къ двумъ угламъ равнымъ по единому; слѣдовательно и AC равна BD.

Такъ же можно доказать, что, ежели AC равна и параллельна BD: AB будетъ равна и параллельна CD; ибо сверхъ того, что сторона AC равна BD, и углы при точкахъ E и F прямые, уголъ ACE будетъ равенъ BDF, понеже AC параллельна къ BD (37); слѣдовательно (75) и третïй уголъ EAC будетъ равенъ третьему DBF. По сему два треугольника, имѣя по одной сторонѣ равной изъ прилежащихъ равнымъ двумъ угламъ по единому, будутъ равны; по чему и AE равна BF; слѣдовательно сïи двѣ линеи параллельны. И такъ отсюду и изъ того что было доказано (82) слѣдуетъ, что AB равна CD.

83. Два треугольника будутъ равны, когда всѣ три стороны у нихъ равны едина по единой, т. е.

Пусть будетъ сторона AB (ф. 48) равна сторонѣ DE (ф. 49), сторона BC равна EF, и сторона AC равна DF.

Представь, что сторона AB положена точно на DE, и треугольникъ BAC положенъ на треугольникъ DEF. Говорю, что точка C упадетъ на точку F.

Изъ точекъ D и E, какъ изъ центровъ, и радїусами DE и DF опиши двѣ дуги JK и HG, пересѣкающїяся на F; явствуетъ, что точка C упадетъ на какую нибудь точку дуги JK; понеже AC равна DF. По той же причинѣ точка C упадетъ на которую нибудь изъ точекъ дуги GH, поелику BC равна EF; по сему должна она упасть на точку F, коя есть одна общая точка симъ двумъ дугамъ, находящимся по тужъ сторону прямыя DE: слѣдовательно сїи два треугольника соумѣщаются совершенно, и по сему равны.

И такъ, дабы составить треугольникъ, коего три стороны извѣстны, должно (ф. 49) провесть прямую DE, равную одной изъ извѣстныхъ сторонъ; и точкою D, какъ центромъ и радїусомъ, равнымъ другой извѣстной сторонѣ, описать дугу JK; также точкою E, какъ центромъ и радїусомъ, равнымъ третїей изъ извѣстныхъ сторонъ, описать дугу GH; накопецъ отъ точки ихъ пресѣченїя F провесть къ точкамъ D и E прямыя FD, FE.

О полигонахъ или многоугольникахъ.

84. Фигура о многихъ сторонахъ вообще называется многоугольникомъ.

Когда имѣетъ она три стороны, называютъ ее треугольникъ и трестороннякъ.

Когда	4...	четырестороннякъ;
——	5...	пятиугольникъ;
——	6...	шестиугольникъ;
——	7...	семиугольникъ;
——	8...	осмиугольникъ;
——	9...	девятиугольникъ;
——	10...	десятиугольникъ.

Не будемъ болѣе продолжать названія сихъ именъ (понеже фигура столь же хорошо знаменуется при произношеніи числа ея сторонъ, какъ и употребленіемъ сихъ разныхъ именъ, коихъ великое число безполезно бы обременило только память); и о сихъ упомянули мы для того только, что онѣ встрѣчаются намъ чаще другихъ.

Выпуклымъ или выдавшимся угломъ называется тотъ, коего вершина внѣ фигуры. 51. фигура имѣетъ всѣ углы выпуклые.

Впалый или впадшій напротивъ есть тотъ, коего вершина вдалась въ фигуру. Уголъ CDE (ф. 52) есть впалый.

Діагональ фигуры есть прямая, проведенная отъ одного угла къ другому, не прилежащему къ первому. AD, AC (ф. 51) суть діагонали.

85. Всякой многоугольникъ можетъ раздѣленъ быть діагоналями, проведенными отъ одного изъ его угловъ, на столько треугольниковъ, сколько у него сторонъ безъ двухъ.

Посмотрѣвъ на 51 и 52 фигуру всякъ можетъ видѣть, что сіе всегда справедливо.

86. И такъ, дабы знать сумму всѣхъ внутреннихъ угловъ какоголибо многоугольника, должно взять 180° столько разъ, сколько сторонъ безъ двухъ.

Ибо очевидно, что сумма внутреннихъ угловъ многоугольниковъ ABCDE (ф. 51) и ABCDEF (ф. 52) есть таже, что сумма угловъ треугольниковъ ABC, ACD, и проч. И понеже три угла треугольника равны 180°: слѣдственно 180° должно взять столько разъ, сколько треугольниковъ, т. е. (85) столько разъ, сколько сторонъ безъ двухъ.

Примѣчаніе. Въ 52 фигурѣ, уголъ CDE, дабы заключался въ прошедшемъ предложеніи, долженъ смотримъ быть не отвнѣ многоугольника, но внутри, какъ составленный изъ угловъ ADE, ADC; оный уголъ есть больше 180°, и который такъ же должно считать угломъ, какъ и всякой другой, который меньше 180°. Ибо уголъ вообще (10) есть не иное что, какъ только отверстіе прямой, обратившейся около неподвижной своей точки; и хотя бы она обратилась больше или меньше 180°, отверстіе, сдѣланное ею, есть всегда уголъ.

87. Ежели всѣ стороны многоугольника неимѣющаго впалыхъ угловъ будутъ продолжены въ одну сторону, сумма всѣхъ внѣшнихъ равна будетъ 360°, сколько бы сторонъ сей многоугольникъ ни имѣлъ. Смотри (ф. 51).

Ибо каждый внѣшній уголъ есть исполненіе внутренняго ему смѣжнаго; и такъ всѣ углы внутренніе со внѣшними равны столько разъ 180°, сколько сторонъ; но (86) внутренніе не разнствуютъ отъ сей суммы, какъ только дважды 180° ю или 360° ю: слѣдовательно для внѣшнихъ остается только 360°.

88. Правильнымъ многоугольникомъ называютъ тотъ, когда у него всѣ стороны и всѣ углы равны. Смотри (ф. 53).

По сему легко узнать, сколько каждый внутренній уголъ правильнаго многоугольника имѣетъ въ себѣ градусовъ: ибо сыскавъ по показанному

предложенію (86) сколько всѣ внутренніе углы имѣютъ, останется только раздѣлить ихъ сумму на число сторонъ многоугольника. На прим: ежели бы спросили, многихъ ли градусовъ каждый внутренній уголъ правильнаго пятиугольника: поелику находится въ предложенномъ вопросѣ пять сторонъ, беру 180° пять разъ безъ двухъ, т. е. три раза, что дастъ 540° внутреннимъ пяти угламъ; а какъ они всѣ равны, каждый будетъ имѣть пятую часть 540°, т. е. 108°.

89. Изъ опредѣленія правильнаго многоугольника слѣдуетъ, что всегда можно провесть одну только окружность круга около всѣхъ угловъ правильнаго многоугольника.

Ибо доказано (54), что можно провесть окружность круга, чрезъ три точки A, B, C (ф. 53); по сему говорю, что оная окружность проходитъ также чрезъ конецъ стороны CD. Самымъ дѣломъ легко *можно доказать*, что точка D, на коей сія *окружность должна встрѣтить* сторону CD, удалена отъ C на разстояніе, равное разстоянію BC: ибо, когда уголъ ABC равенъ углу BCD, дуги ихъ AEC, BFD, коихъ половины служатъ мѣрою симъ угламъ (63), долженствуютъ быть равны; по отнятіи отъ каждой изъ сихъ дугъ общей AFED, остальныя CD, AB должны быть равны; по чему также (7) и хорды CD и AB равны; слѣдственно точка D, на коей сторона CD встрѣчается съ окружностію, проходящею чрезъ точки A, B, C, есть таже, что и вершина угла многоугольника. Такъ же можно доказать и о углахъ E и F.

90. По сему явствуетъ, что, дабы описать кругъ около правильнаго многоугольника, дѣло состоитъ только въ томъ, какъ провесть его чрезъ вершины трехъ его угловъ; что и дѣлаютъ, какъ показано было въ (54).

91. Всѣ перпендикуляры, опущенные изъ центра правильнаго многоугольника къ сторонамъ его, суть равны. Ибо когда сіи перпендикуляры OH, OL долженствуютъ упасть на средину каждой стороны (52): линеи AH и AL будутъ равны; и AO есть общая двумъ треугольникамъ OHA и OLA. Сверхъ сего, понеже треугольники ABO, AOF имѣютъ три стороны равныя, каждая каждой: углы OAH, OAL равны. Слѣдовательно два треугольника OAH, OAL, имѣющіе равный уголъ, содержимый въ двухъ равныхъ сторонахъ, едина по единой, суть равны (80); по сему OH равна OL.

И такъ, естьли радіусомъ, равнымъ одному изъ сихъ перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны многоугольника, опишутъ окружность, она коснется всѣмъ его сторонамъ. Сію окружность называютъ вписанною во многоугольникѣ.

Каждый изъ перпендикуляровъ OH, OL называется (Апотемою) многоугольника.

92. Явствуетъ, что, ежели изъ центра правильнаго многоугольника будутъ проведены линеи ко всѣмъ угламъ онаго, сіи линеи содержать будутъ между собою равные углы: понеже сіи углы измѣряются дугами стянутыми равными хордами: слѣдовательно, чтобъ найти уголъ при центрѣ правильнаго многоугольника, должно раздѣлить 360° на число его сторонъ. Ибо равные его углы вмѣстѣ измѣряются цѣлою окружностію. На прим. шестиугольника каждый уголъ при центрѣ будетъ шестая часть 360°, т. е. будетъ имѣть 60°.

93. И по сему сторона шестиугольника равна радіусу описаннаго около его круга. Ибо когда проведешь радіусы AO и BO, треугольникъ AOB будетъ равнобедренный, и по сему (77) два угла BAO и ABO будутъ равны; и какъ уголъ

лов есть 60°, другїе два будутъ имѣть 120° (75); почему каждый изъ нихъ имѣетъ 60°: слѣдовательно всѣ сїи три угла равны, и треугольникъ есть равносторонный (77); по сему AB равна радїусу AO.

94. Нѣчего говорить больше о правильныхъ многоугольникахъ, коихъ прочїя свойства удобно вывесть изъ тѣхъ, о коихъ лишь только предложили: присовокупимъ только одно, что прежде показанное предложенїе служитъ къ раздѣленїю окружности на части имѣющїя по 15 градусовъ.

Проведи два дїаметра AB, DE (ф. 54) одинъ къ другому перпендикулярные; и взявъ отверстїе циркула равное радїусу CE, положи его одно послѣ другаго отъ E до F, и отъ A до G; чрезъ что четверть окружности AE раздѣлена будетъ на три равныя части AF, FG, GE: ибо, понеже радїусъ взятъ для растворенїя циркула, слѣдуетъ изъ того, что сказали (93), что дуга EF есть 60° ти; а какъ EA 90°; по сему AF 30° ти. По той же причинѣ AG есть 60° ти: и какъ AE есть 90°, слѣдовательно GE 30° ти. На конецъ, ежели отъ цѣлой дуги AE, 90° ти, отнимешь дуги AF и GE, кои вмѣстѣ равны 60°, остальная FG будетъ 30° ти. Раздѣлившъ такимъ образомъ четверть окружности на дуги 30° ти, удобно получишь дугу 15° ти, когда раздѣлишь каждую изъ дугѣ AF, FG и GE по поламъ, какъ показано (53). Такимъ же образомъ поступай и съ каждою изъ трехъ остальныхъ четвертей AD, DB и BE.

Ежели бы потребно было продолжить сїе раздѣленїе до дуги 1° са, должно поступать на угадъ: ибо нѣтъ геометрическаго на оное рѣшенїя. Однако есть геометрическое средство для сысканїя дуги 3°; но какъ предложенїя, къ сему ведущїя, не приносятъ никакой другой пользы, объ оныхъ и говорить не станемъ.

ЗамѢтимъ только сїе, что мы разумѢемъ подъ рѢшенїями геометрическими: оныя суть таковыя, что бы требуемое было сдѢлано опредѢленнымъ числомъ дѢйствїй линейки и циркула.

О пропорцїональныхъ линеяхъ.

95. Прежде нежели начнемъ разсуждать о принадлежащемъ до линей пропорцїональныхъ, помѢстимъ здѢсь нѢсколько предложенїй касающихся до пропорцїи, кои суть непосредственное продолженїе того, что было показано въ АриѳметикѢ. Но для сокращенїя въ рѢчи, согласимся, что, когда впередъ должно будетъ одно количество прибавить къ другому, оное будемъ изображать знакомъ: +, который тоже будетъ значить, что съ, вмѢстѢ съ; и такъ 4 + 3, будетъ значить 4 съ 3мя или 4 вмѢстѢ съ 3мя, или 3 прибавленные къ 4мъ. Подобнымъ образомъ для означенїя вычитанїя будемъ употреблять знакъ: —, который тоже значитъ, что безъ; и такъ 5 — 2 значить будетъ 5 безъ 2хъ, или что должно отнять 2 отъ 5. Какъ не всегда нужно отправлять самымъ дѢломъ сїи дѢйствїя, но только разсуждать объ обстоятельствахъ сихъ дѢйствїй, часто полезнѢе изображать оныя знаками, нежели сЪискивать, что выдетъ.

Дабы означить умноженїе, будемъ употреблять знакъ: ×, который тоже будетъ значить, что умноженное на; и такъ 5 × 4 будетъ значить 5 умноженное на 4.

А для означенїя дѢленїя, будемъ изображать какъ въ АриѳметикѢ: дѢлимое и дѢлитель будемъ писать какъ дробное, коего дѢлимое будетъ числитель, а дѢлитель знаменатель; и такъ $\frac{12}{7}$ значить будетъ 12 раздѢленные на 7.

Положивъ сїе, припомнимъ изъ (Ариѳ. 185), что во всякой пропорцїи сумма предъидущихъ къ суммѣ послѣдующихъ, какъ предъидущїй къ своему послѣдующему; и также разность предъидущихъ къ разности послѣдующихъ, какъ предъидущїй къ своему послѣдующему.

96. Слѣдовательно можемъ заключить изъ сего, что во всякой пропорцїи, сумма предъидущихъ къ суммѣ послѣдующихъ, содержится такъ, какъ разность предъидущихъ къ разности послѣдующихъ: ибо понеже въ пропорцїи 48 : 16 : : 12 : 4 на прим. имѣемъ (Ариѳ. 185).

$$48+12 : 16+4 :: 12 : 4$$

и . . . $$48-12 : 16-4 :: 12 : 4$$

Явно, (понеже 12 : 4 есть тоже съ обѣими содержанїями) что можно заключить, какъ 48+12 : 16+4 : : 48—12 : 16—4; тоже будетъ и на всякой другой пропорцїи.

97. *Слѣдовательно въ сей послѣдней пропорцїи, полагая 3й членъ на мѣсто втораго, и вторый на мѣсто третьяго, что и можно сдѣлать (Ариѳ. 182.), можемъ также сказать, что сумма предъидущихъ къ ихъ разности, какъ сумма послѣдующихъ къ разности оныхъ.*

98. Ежели въ пропорцїи 48:16::12:4 перемѣнишь мѣста двухъ среднихъ, отъ чего будетъ 48:12::16:4, и къ оной сдѣлаешь прикладъ предложенїя доказаннаго (96), будешь имѣть сїю 48+16 : 12+4 :: 48—16 : 12—4, коя въ разсужденїи пропорцїи 48:16::12 : 4 даетъ слѣдующее предложенїе: сумма двухъ первыхъ членовъ пропорцїи, содержится къ суммѣ двухъ послѣднихъ, какъ разность двухъ перьвыхъ къ разности двухъ послѣднихъ; или (положа третїй членъ на мѣсто втораго, и вторый на мѣсто

третьяго) сумма двухъ первыхъ членовъ содержится къ ихъ разности, какъ сумма двухъ последнихъ къ ихъ разности.

99. Ежели содержанїе составлено изъ произведенія многихъ другихъ содержанїй, можно вмѣсто каждаго изъ составляющихъ содержанїй поставить содержанїе, изображенное другими членами, съ тѣмъ только, чтобъ сїи два члена были въ томъ же содержанїи съ тѣми, вмѣсто коихъ они поставлены.

На примѣръ въ содержанїи 6×10 : 2×5, можно вмѣсто сомножителей 6 и 2 поставить 3 и 1, что дастъ составленное содержанїе 3×10 : 1×5, кое есть тоже, что 6×10 : 2×5. Самою вещїю, понеже 6:2::3:1 можно не перемѣняя сей пропорцїи (Ариѳ. 183), умножить предъидущїе 10 и послѣдующїе 5, тогда будетъ 6×10:2×5::3×10:1×5.

Легко можно видѣть, что сїе разсужденїе можно приложить ко *всякому другому содержанїю.*

100. Ежели двѣ пропорцїи или больше будутъ такїя, что въ первомъ содержанїи одной, предъидущїй будетъ равенъ послѣдующему въ другой: можно, когда потребно будетъ умножить сїи пропорцїи членъ на членъ, оставить члены, кои будутъ общїе у предъидущаго съ послѣдующимъ. На прим: ежели будетъ двѣ пропорцїи:

6:4::12:8
4:3::20:15

Можно заключить, что 6:3::12×20:8×15.

Ибо когда допустимъ 4 общимъ сомножителемъ, содержанїе 6×4 къ 4×3, кое бы тогда было, не другое будетъ отъ содержанїя 6 къ 3 (Ариѳ. 179), гдѣ сей сомножитель оставленъ.

Также, ежели будетъ 6:4::12:8
4:3::20:15
3:7::21:49

Можно заключить, что 6:7::12×20×21:8×15×49.

Тоже будетъ и на вторыхъ содержанїяхъ, и по той же причинѣ.

Сїе примѣчанїе полезно для сысканїя содержанїя двухъ количествъ, когда оно должно быть составленное: понеже тогда сравниваютъ каждое изъ сихъ количествъ съ другими количествами, которыя употребляютъ какъ вспомогательныя, и кои не должны остаться послѣ доказательства.

Теперь мы намѣрены показать прикладъ познанїя пропорцїи на числахъ, къ линеямъ. Но дабы сдѣлать наши доказательства кратчайшими и генеральнѣйшими, не дадимъ никакой назначенной величины симъ линеямъ, развѣ только въ нѣкоторыхъ примѣрахъ; въ прочемъ всегда можно имѣть пособїя отъ сравненїя ихъ съ числами.

Содержанїя, о коихъ мы здѣсь разсуждаемъ, суть содержанїя геометрическїя. И такъ когда скажемъ, что такая-то линея къ такой-то содержится какъ 5 къ 4 на прим. должно разумѣть, что первая содержитъ въ себѣ вторую столько же, сколько 5 содержитъ 4.

101. Ежели на одной изъ сторонъ AZ какого либо угла ZAX (ф. 55) назначишь равныя части AB, BC, CD, DE, и проч. произвольной величины, и произвольное ихъ число; и ежели, проведши по произволенїю отъ которой нибудь точки раздѣленїя, на прим. F, прямую FL, встрѣчающуюся со стороною AX на L, проведешь отъ другихъ точекъ раздѣленїя линеи BG, CH, DJ, EK, и проч. параллельныя къ FL: говорю, что части AG, GH, HJ и проч. стороны AX будутъ также равны между собою.

Чрезъ точки G, H, J, и проч: проведемъ линеи GM, HN, JO и проч. параллельныя къ AZ: треугольники ABG, GMH, HNJ, JOK и проч. будутъ равны между собою: ибо 1е, каждая изъ линей GM,

HN, JO и проч. равна AB, понеже (82) онѢ равны BC, CD, DE и проч; 2е, углы GMH, HNJ, JOK, и проч. всѢ равны, поелику каждый изЪ нихЪ равенЪ углу ABG (43); 3е, углы MGH, NHJ, OJK и проч. суть также всѢ равны между собою, понеже каждый и изЪ сихЪ равенЪ углу BAG (43).

По чему всѢ треугольники BAG, MGH, NHJ и проч. имѢютЪ по равной сторонѢ, прилежащей двумЪ равнымЪ угламЪ единЪ по единому: слѢдовательно всѢ они равны; по чему и стороны AG, GH, HJ и проч. сихЪ треугольниковЪ суть равны между собою, и линея AX самымЪ дѢломЪ раздѢлена сими параллельными на части равныя.

ЯвствуетЪ убо, что, ежели AB будетЪ какаянибудь часть AG, то и BC будетЪ такая же часть прямыя GH, и CD прямыя HJ; ежели на пр: AB есть $\frac{2}{3}$ AG, BC будетЪ $\frac{2}{3}$ GH, и такЪ далѢе.

Тоже будетЪ на 2, 3, 4 частяхЪ и проч. прямой AF, сравненныхЪ сЪ 2, 3, 4 и проч. частями прямой AL. СлѢдовательно какойнибудь отсѢкЪ AD или DF линеи AF есть такая же часть соотвѢтствующаго отсѢка AJ или JL линеи AL, какая AB есть AG, т. е. что

AD: AJ:: AB: AG

и DF: JL:: AB: AG

Можно также сказать, что AF: AL:: AB: AG. СлѢдовательно (поелику содержанïе AB: AG есть общее самЪ тремЪ пропорцïямЪ) можно сказать, что AD: AJ:: DF: JL и AD: AJ:: AF: AL.

102. Посему, ежели чрезЪ точку D (ф. 56), взятую по произволенïю на одной изЪ сторонЪ AF, треугольника AFL, проведешЪ DJ, параллельную сторонѢ FL; двѢ стороны AF, AL будутЪ разсѢчены пропорцïонально, т. е. всегда будетЪ:

AD: AJ:: DF: JL

и AD: AJ:: AF: AL

Или по перемѣнѣ двухъ среднихъ (Ариѳ. 182):

AD: DF:: AJ: JL

и AD: AF:: AJ: AL.

какой бы притомъ уголъ FAL ни былъ.

Самымъ дѣломъ всегда можно представить, что сторона AF раздѣлена на столько равныхъ частей, сколько угодно: слѣдственно и на безконечное число оныхъ: по сему, когда точка D не можетъ не быть однимъ изъ сихъ сѣченій, то разсужденіе предъидущаго параграфа можетъ приложено здѣсь быть слово въ слово.

103. И по сему, 1 е: Ежели отъ точки A взятой произвольно внѣ линеи GL (ф. 57) проведешь къ разнымъ ея точкамъ многія другія прямыя AG, AH, AJ, AK, AL, то всякая линея, какъ BF, параллельная къ GL, разсѣчетъ всѣ сіи линеи на части пропорціональныя, т. е. будетъ:

AB: BG:: AC: CH:: AD: DJ:: AE: EK:: AF: FL.

и AB: AG:: AC: AH:: AD: AJ: AE: AK:; AF: AL.

Ибо смотря на углы GAH, GAJ, GAK, GAL одинъ за другимъ, какъ на уголъ FAL въ фигурѣ 56, подобнымъ образомъ можешь доказать, что всѣ сіи содержанія равны.

104. 2 е. Линея AD, раздѣляющая (ф. 56*) уголъ BAC треугольника на двѣ равныя части, разсѣкаетъ противулежащую ему сторону BC на двѣ части BD, DC, пропорціональныя соотвѣтствующимъ сторонамъ AB, AC; т. е. такъ, что BD: DC:: AB: AC.

Ибо, естьли чрезъ точку B проведешь BE параллельную къ AD, коя встрѣчается съ CA, продолженною на точкѣ E; поелику линеи CE, CB разсѣчены тогда пропорціонально (102), будетъ какъ BD: CD:: EA: AC.

Удобно видѣть можно, что AE равна AB; ибо, понеже AD и BE параллельны, уголъ E равенъ

углу DAC (37), и уголЪ EBA равенЪ своему поперечному BAD (38). А какЪ DAC и BAD равны, будучи половинами угла BAC, то углы E и EBA будутЪ равны: почему и стороны AE и AB суть также равны; посему пропорція BD : CD :: AE : AC перемѣняется вЪ пропорцію BD : CD :: AB : AC.

105. Ежели линеи AF и AL (ф. 56) разсѣчешь пропорціонально на точкахЪ D и J, т. е. такЪ, что AF : AD :: AL : AJ, линея DJ, соединяющая сіи точки, будетЪ параллельна кЪ FL.

Ибо часть прямыя AL, кою отсѣкла бы параллельная, проведенная отЪ точки D, должна (102) содержима быть вЪ AL столько же сколько AD вЪ AF. А какЪ по подлогу AJ содержится вЪ AL точно столько разЪ, слѣдовательно сія часть не можетЪ быть иная кромѣ AJ.

106. Посему, ежели линеи AG, AH, AJ, AK, AL (ф. 57), исходящія отЪ точки A кЪ разнымЪ точкамЪ линеи GL, будутЪ разсѣчены пропорціонально на точкахЪ B, C, D, E, F; линея BCDEF, проходящая чрезЪ всѣ сіи точки, будетЪ параллельна кЪ GL.

107. Предложенія показанныя (102 и слѣд.) столь же истинны и тогда, когда линея BF, вмѣсто что бы быть между точкою A и линеею GL, какЪ вЪ 57 фигурѣ, случится поверхЪ точки A, какЪ вЪ 58 фигурѣ. Ибо все сказанное о фигурѣ 55 и служащее основаніемЪ утвержденнымЪ предложеніямЪ вЪ (102 и слѣд.) могло бы равномѣрно приложено быть и кЪ параллельнымЪ, кои бы пересѣкли линеи ZA и XA, продолженныя вЪ верхЪ вЪ фигурѣ 55.

О подобіи треугольниковЪ.

108. Сходственными сторонами двухЪ треугольниковЪ или вообще двухЪ фигурЪ подобныхЪ

называются тѣ, кои находятся въ одинаковомъ положенiи каждая въ фигурѣ, къ коей принадлежитъ.

109. Два треугольника, у коихъ всѣ углы равны одинъ по единому, имѣютъ сходственныя стороны пропорцiональны, по сему и подобны.

Ежели два треугольника ADJ, AFL (ф. 59 и 60) суть таковы, что уголъ A перьваго равенъ углу A втораго, уголъ D равенъ углу F, и уголъ J углу L, говорю, что AD : AF :: AJ : AL :: DJ : FL.

Ибо, понеже уголъ A перьваго равенъ углу A втораго, можно будетъ положить сiи два треугольника одинъ на другой такъ, какъ изображено въ фигурѣ 56; тогда, поелику уголъ D равенъ углу F, линеи DJ и FL будутъ параллельны (42); слѣдовательно въ сходственность того, что было сказано (102), будетъ AD : AF :: AJ : AL.

Проведемъ теперь чрезъ точку J прямую JH параллельную къ AF; и по сказанному въ (102) можно видѣть, что AJ : AL :: FH : FL; или, понеже FH равна DJ (82) :: DJ : FL; посему AD : AF :: AJ : AL :: DJ : FL.

И поелику можно перемѣнить мѣста среднихъ, можно сказать такъ же: AD : AJ :: AF : AL : и AJ : DJ :: AL : FL :

110. Когда же два угла треугольника (74) суть равны двумъ угламъ другаго треугольника порознь, третiй необходимо равенъ третьему; заключимъ изъ сего, что два треугольника будутъ подобны, когда у нихъ два угла равны двумъ угламъ одинъ по единому.

111. Видѣли (43), что два угла имѣющiе стороны свои параллельны, и кои обращены въ тужъ сторону, равны; по сему два треугольника, у коихъ стороны параллельны, имѣютъ углы равные одинъ по единому, слѣдовательно (109) и стороны ихъ пропорцiональны.

По сему также два треугольника, у коихъ стороны перпендикулярны каждая къ каждой, имѣютъ сіи самыя стороны пропорціональныя: Ибо, ежели одинъ изъ сихъ треугольниковъ оборотятъ на четверть круга, стороны его сдѣлаются параллельными къ сторонамъ другаго.

112. Ежели изъ прямаго угла A прямоугольнаго треугольника BAC (ф. 43) опустишь перпендикулярную AD на сопротивную ему сторону BC, (кою называютъ гипотенузою), слѣдуетъ 1е, что два треугольника ADB, ADC будутъ подобны между собою и треугольнику BAC; 2е. перпендикулярная AD будетъ средняя пропорціональная между сими двумя частями BD и DC гипотенузы; 3е. каждая изъ сторонъ AB или AC около прямаго угла будетъ средняя пропорціональная между гипотенузою и отсѣкомъ ко взятой сторонѣ прилежащимъ BD или DC.

Ибо каждый изъ сихъ двухъ треугольниковъ ADB, ADC имѣетъ по углу D прямому, такъ какъ и треугольникъ BAC имѣетъ при точкѣ A; сверхъ сего, каждый изъ нихъ имѣетъ по углу общему съ симъ самымъ треугольникомъ BAC, поелику уголъ B принадлежитъ какъ къ треугольнику ADB, такъ и къ треугольнику BAC; также уголъ C принадлежитъ какъ къ треугольнику ADC, такъ и къ треугольнику BAC; по сему (110) сіи три треугольника подобны. И (109), сравнивая сходственныя стороны двухъ треугольниковъ ADB и ADC получимъ . . . .

BD: AD:: AD: DC.

Сравнивая сходственныя стороны двухъ треугольниковъ ADB, BAC, получимъ:

BD: AB:: AB: BC:

На конецъ сравнивая сходственныя стороны треугольниковъ ADC и BAC будемъ имѣть:

CD: AC :: AC: BC.

Гдѣ и видно, что AD есть (Ариѳ. 174) средняя пропорцiональная между BD и DC; AB средняя пропорцiональная между BD и BC; и наконецъ AC средняя пропорцiональная между CD и BC.

113. Два треугольника, имѣющiе равные углы въ сторонахъ пропорцiональныхъ, имѣютъ также и прочiе два угла равные, и по сему суть подобны.

Ежели два треугольника ADJ, AFL (ф. 59 и 60) суть такiе, что уголъ A перваго равенъ углу A втораго, и стороны объемлющiя оные углы суть какъ AD: AF :: AJ: AL, говорю, что они будутъ подобны, т. е. что прочiе ихъ углы равны единъ по единому и третiи ихъ стороны DJ и FL въ томъ же содержанiи съ AD и AF или съ AJ и AL.

Ибо уголъ A треугольника ADJ можно положить на уголъ A треугольника AFL такъ, какъ представлено въ фигурѣ 56. И какъ полагается, что AD: AF :: AJ: AL, двѣ прямыя AF, AL пересѣчены пропорцiонально на D и J; по сему DJ параллельна къ FL (105) и (37), уголъ AFL равенъ углу ADJ, и уголъ ALF равенъ углу AJD.

Отсюду и изъ сказаннаго (109), слѣдуетъ, что DJ: FL :: AD: AF :: AJ: AL.

114. Два треугольника, у коихъ три сходственныя стороны пропорцiональны, имѣютъ углы равные каждый каждому, посему и подобны.

Ежели положить (ф. 61 и 62), что DE: AB :: EF: BC :: DF: AC, говорю, что уголъ D равенъ углу A, уголъ E равенъ углу B, и уголъ F равенъ углу C.

Вообразимъ, что треугольникъ DGE составленъ на DE, коего уголъ DEG пусть будетъ равенъ углу B, уголъ GDE углу A; треугольникъ DEG будетъ подобенъ треугольнику ABC (110);

посему (109) DE: AB :: GE: BC :: DG: AC; но по подлогу DE: AB :: EF: BC :: DF: AC; и такъ поелику содержанїе DE: AB есть общее, будутъ сїи двѣ пропорцїи:

GE : BC :: EF : BC
и DG : AC :: DF : AC.

Слѣдовательно, понеже два послѣдующїе равны между собою въ каждой изъ сихъ двухъ пропорцїй, предъидущїе будутъ такъ же равны; посему GE равна EF, а DG равна DF. Треугольникъ DEG имѣетъ убо всѣ три стороны равныя сторонамъ треугольника DEF; и потому (83) онъ равенъ сему треугольнику DEF; видѣли же мы недавно, что треугольникъ DEG подобенъ ABC, слѣдовательно и DEF подобенъ также ABC.

115. Доказали мы выше (111), что когда линея DJ (ф. 56) параллельна къ сторонѣ FL, два треугольника ADJ, AFL суть подобны; какъ сїя истинна можетъ существовать при всякой величинѣ угла A, должно заключить (ф. 57), что треугольники AGH, AHJ, AJK, AKL, подобны треугольникамъ ABC, ACD, ADE, AEF, каждый каждому, и слѣдственно (109) KL: EF :: AK: AE :: KJ: DE :: AJ: AD :: JH: CD :: AH: AC :: GH :: BC; по сему взявъ изъ сихъ содержанїй только тѣ, кои заключаютъ въ себѣ часть прямыхъ GL и BF, будемъ имѣть KL: EF :: KJ: DE :: JH: CD :: GH: BC. т. е. ежели отъ точки A проведемъ къ разнымъ точкамъ прямыя GL многїя другїя прямыя, сїи прямыя разсѣкутъ всякую другую прямую параллельную къ GL точно такъ, какъ разсѣкаютъ GL, т. е. на части, кои будутъ въ томъ же между собою содержанїи, въ какомъ и соотвѣтствующїя части линеи GL.

116. Предложенныя теперь нами начала служатъ основанїемъ всѣмъ частямъ Математики теорической и практической. И какъ нужно

знать сїи начала совершенно, поговоримъ еще нѣсколько о ихъ употребленїи, какъ для сея причины, такъ и для того, что оное подаетъ намъ случай объяснить много полезнаго въ практикѣ.

117. Предложенїе показанное (101) подаетъ средство довольно естественное разсѣкать данную линею на равныя части, или на части, кои бы имѣли между собою данное содержанїе. Положимъ что AR (ф. 55) данная, кою желаютъ разсѣчь на двѣ части, которыя бы имѣли данное содержанїе, на прим: 7 къ 3. Отъ точки A проведи неопредѣленную AZ въ какомъ либо углѣ, и, взявъ произвольное раствореніе циркула AB, положи 10 разъ оное вдоль по AZ; пусть Q будетъ конецъ послѣдней части, соедини потомъ концы Q и R линеи AQ и данныя AR; тогда естьли чрезъ точку D, т. е. конецъ третьяго сѣченїя проведешь DJ параллельную къ QR, линея AR *будетъ раздѣлена на двѣ части* RJ, AJ, кои *будутъ между собою* :: 7 : 3; ибо (101 и 102) онѣ содержатся между собою :: DQ : AD, кои сдѣлали мы состоящими изъ 7 и 3 хъ частей.

Изъ сего видно, что ежели бы хотѣли раздѣлить линею AR на бо́льшее число частей, на прим: на 5, кои бы были въ содержанїи 7, 5, 4, 3, 2: сложи всѣ сїи числа, отъ чего выдетъ 21; сїи 21 раствореніемъ циркула положи по линеи AZ, и проведи параллельныя къ линеи QR отъ концовъ раздѣленія 7, 5, 4, 3 и 2 го.

118. Ежели бы содержанїя даны были на линеяхъ, тогда бы положили всѣ сїи линеи одна подлѣ другой по AZ.

По сему явствуетъ, какъ должно поступить, естьли бы надобно было раздѣлить линею AR на равныя части.

Но когда части раздѣляемой линеи должны быть малы, или когда сїя самая линея мала, то

самая малѣйшая ошибка въ параллельныхъ, много имѣетъ влїянія на равенство или на неравенство частей; для сей причины не безполезно будетъ предложить слѣдующее средство:

119. Пусть fg (ф. 63) будетъ линея, кою потребно раздѣлить на равныя части, на прим. на 6: проведи неопредѣленную линею BC, на коей назначь по порядку шесть, по произволенїю взятыхъ равныхъ отверстїй циркула. Пусть будетъ BC, содержащая въ себѣ сїи 6 частей; на сей BC напиши равносторонный треугольникъ BAC, описавъ изъ двухъ концовъ B и C, какъ изъ центровъ, и разстоянїемъ BC, какъ радїусомъ двѣ дуги, сѣкущїяся на A. На сторонахъ AB, AC возьми отъ точки A, части AF, AG равныя, каждую fg; и проведши FG, коя будетъ равна fg, отъ точки A ко всѣмъ точкамъ дѣленїя линеи BC проведи прямыя, кои разсѣкутъ FG такъ же, какъ разсѣчена и BC.

Ибо, когда сїи линеи AF, AG равны между собою, и линеи AB, AC также равны; будетъ AB:AF::AC:AG, слѣдовательно AB, AC разсѣчены пропорцїонально на F и G; почему FG параллельна къ BC, слѣдственно (111) треугольникъ FAG подобенъ ABC; по сему FAG есть равносторонный, и AG равна AF; слѣдственно равна она и fg. Сверхъ сего, когда FG параллельна къ BC, сїи двѣ линеи (115) должны быть разсѣчены пропорцїонально линеями, проведенными отъ A до прямой BC.

Предложенное нами теперь можетъ служить къ составленїю и раздѣленїю мачтаба, нужнаго для уменьшенїя фигуръ; но удобнѣйшїй мачтабъ въ великомъ числѣ дѣйствїй есть тотъ, который называютъ десятичнымъ. Составляютъ его слѣдующимъ образомъ: при концахъ A и B прямой AB (ф. 64), кою потребно раздѣлить на 100

ственно проведенными отъ концовъ в и с къ а. Сдѣлавъ сiе, проведи на бумагѣ линею bc (ф. 66), и назначь по ней съ мачтаба по произволенiю сдѣланнаго, столько частей, сколько въ вс футъ, ежели измѣрялъ ее футами; и помощiю транспортира, описаннаго (22), сдѣлай при точкѣ b уголъ того же числа градусовъ, сколько нашелъ въ углѣ в; а при точкѣ с тѣхъ же градусовъ съ угломъ с; тогда двѣ ab, ac, встрѣтясь на точкѣ а, представятъ точку а; такъ, что ежели измѣряешь ab по своему мачтабу, число частей, кое найдешь, покажетъ число футъ въ ав. Ибо, когда два угла b и с сдѣланы равными двумъ угламъ в и с, треугольникъ bac подобенъ треугольнику вас (110); посему и стороны ихъ пропорцiональны.

Такимъ же образомъ можно измѣрить разстоянiе острова отъ берега. Когда можно его видѣть отъ двухъ точекъ сего берега, сего острова разстоянiе и будетъ извѣстно.

122. По предложенiю доказанному (114), можно оставить измѣренiе угловъ, въ случаѣ о коемъ мы говоримъ. Самою вещiю довлѣетъ, естьли мы воткнемъ шестикъ въ точкѣ е (ф. 65), коя бы была въ тойже прямости съ точками а и в, и другой въ точкѣ f, въ тойже прямости съ а и с; довольно, говорю, измѣрить линеи вс, ве, се, вf и сf; потомъ составить треугольникъ bec (ф. 66), коего бы стороны bc, be, ce, имѣли въ себѣ по стольку частей одного и того же мачтаба, сколько вс, ве, се имѣютъ футъ; также на bc составить другой треугольникъ bcf, коего бы стороны bf, cf имѣли въ себѣ по стольку частей мачтаба, сколько въ вf, сf футъ; потомъ, продоливъ стороны be, cf, кои встрѣтятся въ точкѣ а, означимъ точку а; такъ что, смѣривъ ba по мач-

шабу, узнаемъ по числу сысканныхъ частей, сколько футъ должно быть въ ав.

Самою вещїю, когда треугольникъ bec имѣетъ стороны пропорцїональныя сторонамъ треугольника вес, сїи треугольники должны имѣть и равные углы; по чему уголъ евс или авс равенъ углу ebc или abc; по той же причинѣ уголъ fcb или асв равенъ углу fcb или acb; посему два треугольника асв и acb подобны.

Въ тожъ время явствуетъ, что по сему сочиненїю можно опредѣлить и углы авс, асв, когда измѣрить транспортиромъ углы abc, acb на бумагѣ.

На конецъ, хотя сїи средства, и многїя другїя, кои легко можно вывесть изъ оныхъ, могутъ быть часто полезны, однако не будемъ долѣе останавливаться на оныхъ, понеже Тригонометрїя, кою мы покажемъ въ послѣдованїи, снабдитъ насъ средствами гораздо легчайшими и ближайшими къ точности: ибо, хотя дѣйствїя нами описанныя по самой строгости точны въ теорїи, однако точность оная очень ограничена на практикѣ, поелику погрѣшности, кои можно сдѣлать при сочиненїи фигуры abc, сколь ни малы, имѣютъ великое влїянїе на заключенїя для фигуры авс, кои всегда несравненно увеличиваются.

О линеяхъ пропорцїональныхъ въ кругѣ.

123. Двѣ линеи называются пресѣченными въ обратномъ или возвратномъ содержанїи, когда для составленїя пропорцїи изъ сихъ линей, обѣ части одной составляютъ крайнїе, а обѣ части другой среднїе члены пропорцїи.

И двѣ линеи называются возвратно пропорцїональными своимъ частямъ, когда одна изъ сихъ линей и ея часть будутъ крайнїе, другая же линея и ея часть среднїе.

разныхъ частей, возставляютъ перпендикуляры AC, BD; по каждому изъ оныхъ полагаютъ 10 отверстій циркула, равныхъ между собою, но величины произвольной. Проведши CD, раздѣляютъ AB на 10 равныхъ частей, кои и полагаютъ по CD; потомъ проводятъ накось прямыя, какъ можно видѣть въ фигурѣ, и чрезъ соотвѣтственныя точки прямыхъ CA, BD проводятъ прямыя линеи, кои всѣ будутъ параллельны къ AB: тогда все бы равно было, какъ бы и AB раздѣлена была на 100 равныхъ частей. На прим: ежели потребно имѣть 47 частей, коихъ AB содержитъ 100, беру на линеи проходящей при No. 7. часть 7H отъ CA до линеи накось проходящей при N. 40. И такъ же поступаю для всякаго другаго числа.

Самою вещію, поелику треугольники C7V, CAX подобны, очевидно, что 7V содержитъ въ себѣ 7 частей такихъ, коихъ AX содержала бы въ себѣ 10; а какъ VH содержитъ въ себѣ четыре разстоянія равныя AX, цѣлая линея 7H равна 47 частямъ, коихъ BX содержала бы 10, т. е. 47 частей такихъ, коихъ AB содержала бы 100.

120. Предложеніе доказанное (102) можетъ служить къ сысканію четвертой пропорціональной къ тремъ даннымъ линеямъ ab, cd. ef (ф. 56), т. е. линеи, коя бы была четвертымъ членомъ пропорціи, коея три первыя были бы ab, cd, ef. Для сдѣланія сего проведши двѣ неопредѣленныя прямыя AF, AL, составляющія какой нибудь уголъ, положи ab отъ A до D и cd отъ A до F; равнымъ образомъ положи и ef отъ A до J; и соединивъ двѣ точки D и J прямою DJ, чрезъ точку F проведи линею FL параллельную къ DJ, коя и опредѣлитъ AL искомую четвертую пропорціональную.

Можно также сдѣлать сїе по предложенїю, показанному (109) слѣдующимъ другимъ образомъ: На неопредѣленной линеи AF (ф. 56) возьми двѣ части AD, AF равныя по порядку прямымъ ab, cd; и проведши DJ въ какомъ либо съ нею углѣ равную ef, проведи чрезъ точки A и J прямую AL, кою пересѣчетъ прямая FL, параллельная къ DJ, сїя параллельная будетъ искомая четвертая пропорцїональная.

Когда два среднїе члены пропорцїи равны, четвертый членъ называется тогда третїею пропорцїональною: понеже три только разныя количества составляютъ пропорцїю. И такъ когда потребно сыскать третїю пропорцїональную къ двумъ даннымъ линеямъ, должно разумѣть, что спрашиваютъ четвертый членъ пропорцїи, въ которой вторый изъ данныхъ двухъ линей заступаетъ мѣсто двухъ среднихъ. Дѣйствуютъ же точно такъ, какъ было лишь только показано.

121. *Предложенїя показанныя* (109, 113, 114) могутъ послужить къ разрѣшенїю сей генеральной проблемы: когда три даны изъ шести вещей, т. е. угловъ и сторонъ входящихъ въ треугольникъ, сыскать другїе три, съ тѣмъ только, чтобы всегда между сими тремя извѣстными была сторона.

Мы намѣрены показать нѣсколько сему примѣровъ.

Положимъ, что, будучи на полѣ въ точкѣ B (ф. 65), желаешь знать въ какомъ разстоянїи находится отъ сей точки B предмѣтъ A, къ коему подойти невозможно.

Назначь линею какой нибудь величины BC, и измѣрь оную, и на угадъ сдѣлай ее сколь можно равною BA. Потомъ графометромъ, который описанъ нами (въ 23), измѣрь углы ABC, ACB, составляемые съ BC двумя линеями, ум-

124. Двѣ хорды AC и BD (ф. 67), сѣкущіяся въ кругѣ на какой либо точкѣ E, и въ какомъ бы углѣ ни было, пересѣкаются всегда въ возвратномъ содержаніи, т. е. AE : BE :: DE : CE.

Ибо, ежели проведешь хорды AB, CD, составятся два треугольника BEA, CED, подобные, что легко и доказать можно; понеже, кромѣ того что уголъ BEA равенъ углу CED (20), уголъ ABE или ABD равенъ углу DCE или DCA: ибо сіи два угла имѣютъ вершины свои при окружности и стоятъ на той же дугѣ AD (63). Слѣдовательно, треугольники BEA и CED подобны (110); посему сходственныя ихъ стороны пропорціональны, т. е. AE : BE :: DE : CE, гдѣ и видно, что части хорды AC крайнія, а части BD среднія.

125. Понеже доказанное предложеніе всегда свою силу имѣетъ, гдѣ бы точка E ни была и въ какихъ бы углахъ сіи двѣ хорды AC и BD ни пересѣклись, слѣдовательно справедливо оно будетъ и тогда, когда сіи двѣ хорды (ф. 68) взаимно перпендикулярны и одна изъ двухъ, наприм. AC, проходитъ чрезъ центръ; и какъ въ семъ случаѣ, поелику хорда BD разсѣчена на двѣ равныя части (51), два средніе члена пропорціи AE : BE :: DE : CE будутъ равны и пропорція перемѣнится въ сію другую, AE : BE :: BE : CE; слѣдовательно, каждый перпендикуляръ BE, опущенный изъ какой либо точки в окружности къ діаметру, есть средній пропорціональный между двумя частями AE, CE сего діаметра.

126. Сіе предложеніе имѣетъ множество полезныхъ приложеній. Теперь предложимъ только одно, а именно, какъ сыскивать среднюю пропорціональную между двумя данными линеями ae, ec (ф. 70).

Проведи неопредѣленную прямую AC, и положи по ней одну подлѣ другой линеи AE, EC равныя линеямъ ae, ec; и написавъ на цѣлой AC, какъ на діаметрѣ, полукружіе ABC, воставь изъ общей ихъ точки E перпендикуляръ EB къ AC, и продолжи его до окружности; сія перпендикулярная будетъ искомая средняя пропорціональная.

127. Двѣ сѣкущія прямыя AB, AC, проведенныя отъ одной внѣшней точки круга A (ф. 69), и кончащіяся при впалой части окружности, суть всегда возвратно пропорціональны внѣшнимъ ихъ частямъ AD, AE, гдѣ бы сія точка A ни находилась внѣ круга, и какой бы уголъ сіи сѣкущія ни дѣлали.

Проведи хорды CD и BE, будешь имѣть два треугольника ADC, AEB, въ коихъ 1е, уголъ A общій; 2е, уголъ B равенъ углу C, понеже каждый изъ нихъ имѣетъ вершину свою при окружности, и стоятъ на той же дугѣ DE (63); по сему (110) сіи два треугольника подобны и имѣютъ стороны пропорціональны: посему AB : AC :: AE : AD, гдѣ можно видѣть, что сѣкущая AB и внѣшняя ея часть AD составляютъ крайніе, между тѣмъ какъ сѣкущая AC со своею частію AE, составляютъ средніе члены.

128. Понеже сіе предложеніе справедливо, какой бы уголъ BAC ни былъ; ежели представишь, что AB неподвижна, а сторона AC будетъ отъ нея отходить, двѣ точки сѣченія E и C безпрестанно будутъ приближаться одна къ другой, доколѣ на конецъ прямая AC придетъ на прикасающуюся AF, сіи двѣ точки сойдутся и каждая изъ AC, AE сдѣлается равною AF; такъ что пропорція AB : AC :: AE : AD сдѣлается AB : AF : AF : AD, слѣдственно:

129. Ежели отъ точки A, взятой внѣ круга, проведена будетъ нѣкая сѣкущая AB, а другая прикасающаяся AF, сїя прикасающаяся будетъ средняя пропорцїональная между сѣкущею AB и внѣшнею ея частїю AD.

130. Сїе предложенїе между другими употребленїями можетъ служить къ тому, какъ раздѣлять линею въ крайнемъ и среднемъ содержанїи. Говорится, что линея AB (ф. 71), разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ содержанїи, когда она разсѣчена на двѣ части AC, BC такїя, что одна BC изъ сихъ частей есть средняя пропорцїональная между цѣлою линеею AB и другою частїю AC, т. е. такїя:

AC : BC :: BC : AB.

Рѣшенїе дѣлается слѣдующимъ образомъ: При одномъ изъ концовъ A воставь перпендикуляръ AD, равный половинѣ AB; точкою D, какъ центромъ, и AD, какъ радїусомъ, напиши окружность круга, сѣкущую на E прямую BD, коя соединяетъ точки B и D. Наконецъ, перенеси BE отъ B до C; и линея AB будетъ раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ содержанїи на точкѣ C.

Самымъ дѣломъ линея AB, будучи перпендикулярна къ AD, есть прикасающаяся (48); и понеже BF есть сѣкущая, будетъ (129) BF : AB :: AB : BE или BC: слѣдовательно (Ариѳ. 185) BF-AB : AB-BC :: AB : BC; но AB равна FE, понеже AB двукратна AD; слѣдовательно BF-AB равна BE или BC; а какъ AB-BC есть AC, можно сказать BC : AC :: AB : BC или (Ариѳ. 181) AC : BC :: BC : AB.

О фигурахъ подобныхъ.

131. Двѣ фигуры тогоже числа сторонъ называются подобными, когда сходственные ихъ

углы равны и сходственныя стороны пропорціональны.

Двѣ фигуры ABCDE, abcde (ф. 72, 73) подобны, ежели уголъ A равенъ углу a; уголъ B равенъ углу b; уголъ C равенъ углу c; и такъ далѣе; и есть ли въ тожъ время сторона AB содержитъ сторону ab столько, сколько BC содержитъ bc, и сколько CD содержитъ cd; и такъ далѣе.

Сіи два условія необходимы въ тожъ время въ фигурахъ, имѣющихъ больше трехъ сторонъ. Въ однихъ только треугольникахъ довлѣетъ одно изъ сихъ условій, поелику необходимо влечетъ оно за собою и другое (109, 114).

132. Ежели изъ двухъ сходственныхъ угловъ A и a двухъ подобныхъ многоугольниковъ, проведутъ діагонали AC, AD, ac, ad къ другимъ угламъ, сіи два многоугольника будутъ раздѣлены на тоже число треугольниковъ подобныхъ каждый каждому.

Ибо уголъ B (по подлогу) равенъ углу b, и сторона AB : ab :: BC : bc: слѣдовательно треугольники ABC, abc, имѣющіе равные углы, содержимые въ сторонахъ пропорціональныхъ, суть подобны (113); по сему уголъ BCA равенъ углу bca и AC : ac :: BC : bc.

Ежели отъ равныхъ угловъ BCD, bcd будутъ отняты равные BCA, bca, остальные ACD, acd будутъ равны. А какъ BC : bc : CD : cd; по сему, поелику доказано, что BC : bc :: AC : ac, будетъ CD : cd :: AC : ac; убо сіи два треугольника ACD, acd суть также подобны, понеже есть въ нихъ по равному углу, содержимому въ сторонахъ пропорціональныхъ. Подобнымъ образомъ докажемъ тоже и о треугольникахъ ADE и ade, и о другихъ треугольникахъ, кои бы послѣдовали, ежелибы сіи многоугольники имѣли большее число сторонъ.

133. Ежели два многоугольника ABCDE, abcde составлены изъ тогоже числа треугольниковъ подобныхъ, каждый каждому, и подобно разположенныхъ, будутъ они подобны.

Ибо углы B и E равны угламъ b и e, когда треугольники подобны; и по сей же причинѣ частные углы BCA, ACD, CDA, ADE равны частнымъ угламъ bca, acd, cda, ade; посему цѣлые BCD, CDE равны цѣлымъ bcd, cde, каждый каждому. Сверхъ сего подобїе треугольниковъ доставляетъ сїи равныя содержанїя AB : ab :: BC : bc :: AC : ac :: CD : cd :: AD : ad :: DE : de :: AE : ae. Не бравъ изъ сихъ содержанїй какъ только содержанїя заключающїя въ себѣ стороны многоугольниковъ, будемъ имѣть AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae. Слѣдовательно сїи многоугольники имѣютъ также и сходственныя стороны *пропорцїональныя*. По сему они и подобны.

И такъ, чтобы сдѣлать фигуру подобную данной ABCDE (ф. 72) и коя бы имѣла данную линею сходственную съ AB, положи сїю данную линею по AB отъ A до f; чрезъ точку f проведи fg параллельную къ BC, коя встрѣтится съ AC на g; чрезъ g проведи gh параллельную къ CD, коя встрѣтится съ AD на h; наконецъ чрезъ точку h проведи hi параллельную къ DE, чрезъ что получишь многоугольникъ Afghi подобный многоугольнику ABCDE.

134. Оомѣры двухъ подобныхъ фигуръ суть между собою, какъ сходственныя стороны оныхъ, т. е. что сумма сторонъ фигуры ABCDE содержитъ въ себѣ сумму сторонъ фигуры abcde столько, сколько AB содержитъ въ себѣ сторону ab.

Ибо въ равныхъ содержанїяхъ AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::AE:ae сумма предъидущихъ (Ариѳ. 186) къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предъидущихъ къ своему послѣдующему :: AB:ab. И такъ ясно, что сїи суммы суть обмѣры двухъ фигуръ.

135. Ежели представимъ окружность ABCD EFGH (ф. 74) раздѣленною на столько равныхъ частей, сколько угодно, и проведши отъ центра J къ точкамъ дѣленїя радїусы JA, JB и пр. опишемъ другимъ радїусомъ ja окружность abcde fgh, сѣкущую радїусы на точкахъ a, b, c, d, и пр. явствуетъ, что ежели въ каждой окружности соединимъ точки дѣленїя хордами, составятся два многоугольника подобные; ибо треугольники ABJ, abj, и проч. подобны, понеже имѣютъ они при точкѣ J уголъ общїй, содержимый въ сторонахъ пропорцїональныхъ: ибо, когда JA равна JB, и ja равна jb, очевидно будетъ AJ:BJ::aj:bj: что также доказывается и о прочихъ треугольникахъ. Отсюду и изъ того что было сказано (134), можно заключить, что обмѣръ ABCDEFGH къ обмѣру abcdefgh::AB:ab, или (по причинѣ подобїя треугольниковъ ABJ, abj)::AJ:aj. Какъ сїе подобїе не зависитъ отъ числа сторонъ сихъ двухъ многоугольниковъ, оно и тогда будетъ имѣть свою силу, когда число сторонъ каждаго увеличится до безконечности: и такъ въ семъ случаѣ удобно вообразить можно, что нѣтъ никакой разности между окружностїю и обмѣромъ вписаннаго многоугольника; почему и окружность ABCDEFGH къ окружности abcdefgh будетъ ::AJ:aj, т. е. какъ ихъ радїусы, слѣдовательно такъже какъ ихъ и дїаметры.

136. И такъ заключимъ 1е, что можно смотрѣть на окружность круга, какъ на правильный многоугольникъ, имѣющїй безчисленное множество сторонъ.

2 е. Круги суть фигуры подобныя.

3 е. Окружности круговъ суть между собою, какъ ихъ радіусы или какъ ихъ діаметры.

137. Вообще, ежели въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ проведемъ двѣ линеи, равнонаклоненныя въ разсужденіи двухъ сходственныхъ сторонъ, и ограниченныя при точкахъ подобно положенныхъ въ отношеніи къ симъ сторонамъ, сіи линеи, кои называются линеями сходственными, будутъ между собою въ содержаніи двухъ которыхъ нибудь сходственныхъ сторонъ. Ибо какъ скоро дѣлаютъ онѣ углы равные съ двумя сходственными сторонами, сдѣлаютъ онѣ также углы равные и съ другими которыминибудь сходственными сторонами, понеже углы двухъ подобныхъ многоугольниковъ равны каждый каждому; и такъ, ежели бы въ семъ случаѣ онѣ не были въ томъ же содержаніи съ двумя сходственными сторонами, *ощутительно, что точки, при коихъ* онѣ ограничиваются, не могли бы быть подобно положенными, какъ онѣ полагаются.

138. На сихъ то началахъ, кои мы положили для подобныхъ фигуръ, основывается по большей части наука снятія плановъ. Говоримъ по большей части по тому, что, когда пространство, съ коего потребно снять планъ, есть очень обширнаго протяженія, какъ Европа, Россія и проч. наука для опредѣленія главныхъ ихъ точекъ зависитъ отъ другихъ познаній, о коихъ говорить не есть еще здѣсь приличное мѣсто. Но что касается до подробностей какойлибо земли, берега или рейда и проч. можно ихъ опредѣлить и потомъ представить на планѣ слѣдующимъ образомъ: Замѣтимъ напередъ, мы полагаемъ здѣсь, что всѣ углы, кои потребно будетъ измѣрить, находятся на той же горизонтальной плоскости,

или близко того. Ежелибъ они не были, должно бы прежде дѣланія плана привести ихъ на оный; для сдѣланія чего покажемъ средства въ Тригонометріи.

Положимъ же, что A, B, C, D, E, F, G, H, J, K (ф. 75) суть многія примѣчанія достойные предметы, коихъ желаемъ представить взаимныя положенія въ отношеніи одинъ къ другому на планѣ.

Набросай на бумагѣ сіи предметы какъ нибудь, въ положеніяхъ, какъ они представляются глазу; для сдѣланія сего, переходи въ разныя мѣста, въ коихъ будетъ нужда для легкаго свѣденія о всѣхъ сихъ предметахъ. Сей первый рисунокъ, называемый накидка, послужитъ къ назначенію разныхъ измѣреній, кои будешь брать въ продолженіи дѣйствія.

Измѣрь основаніе AB, коего длина не была бы меньше десятой или девятой части разстоянія двухъ предметовъ самодальнѣйшихъ, сколько видѣть можно отъ концовъ основанія, и кое бы въ тоже время было такое, чтобъ отъ сихъ самыхъ концовъ можно было усмотрѣть сколько возможно бóльшее число предметовъ; потомъ инструментомъ свойственнымъ измѣрять углы, на примѣръ графометромъ, измѣрь при точкѣ A углы EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, дѣлаемые съ линеею AB, линеями умственно проведенными отъ сей точки ко предметамъ E, F, G, C, D, кои можно усмотрѣть отъ концовъ основанія A и B. Также измѣрь при точкѣ B углы EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, дѣлаемые при сей точкѣ съ линеею AB, линеями умственно проведенными отъ сей самой точки B къ тѣмъ же самымъ предметамъ. Естьли находятся предмѣты, какъ H, J, кои не можно было видѣть отъ концовъ A и B, перейди на другія два мѣста ужè примѣ-

ченныя E и F, и отъ коихъ бы можно было видѣть точки H, J; тогда EF, взявъ за основанiе, измѣрь углы HEF, JEF, HFE, JFE, дѣласмые съ симъ новымъ основанiемъ, линеями умственно проведенными къ двумъ предметамъ H и J; наконецъ, естьли находится еще какой другой предметъ, какъ K, который не можно было видѣть ни отъ концовъ AB, ни отъ концовъ EF, возьми еще за основанiе какуюнибудь другую линею, какъ FG, соединяющую двѣ замѣченныя точки, измѣрь также углы при ея концахъ KFG, KGF.

По отправленiи всѣхъ сихъ дѣйствiй опредѣливъ и сочинивъ мачтабъ плана, который намѣреваешься сдѣлать, проведи на семъ планѣ линею ab, и положи по ней столько частей мачтаба, сколько сыскано саженъ или футъ въ AB, смотря чѣмъ измѣрялъ, саженями или футами. Потомъ при точкѣ *a* сдѣлай помощiю транспортира уголъ *bae* столь же многихъ градусовъ и минутъ, сколько нашелъ для BAE; а при точкѣ b уголъ eba тѣхъ же градусовъ и минутъ съ угломъ EBA; двѣ линеи ae, be, кои составятъ сiи углы съ ab, встрѣтятся на точкѣ e, коя изобразитъ на планѣ положенiе предмета E на земли; ибо по сему сочиненiю треугольникъ abe будетъ подобенъ треугольнику ABE; понеже сдѣланы два угла перьваго равные двумъ угламъ другаго (10). Поступай точно такъ же для опредѣленiя точекъ f, g, d, c, кои должны изобразить точки или предметы F, G, D, C. Потомъ, дабы назначить точки h, i и k, проведи линеи ef и fg, на кои смотри какъ на основанiя, и опредѣлишь положенiе точекъ h и j въ разсужденiи ef и точки k въ разсужденiи fg точно такъ же, какъ опредѣлилъ ты другiя точки въ разсужденiи ab. Должно однако примѣтить, чтобы всѣ линеи,

кои проведешь въ сихъ разныхъ дѣйствїяхъ, были назначены только карандашемъ, понеже онѣ ни къ чему другому не служатъ, какъ только для опредѣленїя точекъ c, d, e, и проч. Когда же онѣ одинъ разъ найдены, все остальное вычищается.

Нѣтъ мнѣ нужды доказывать подробно, что точки c, d, e, f, g, h, j, k помѣщены между собою въ томъ же положенїи, какъ и предметы C, D, E, F, G, и проч. между собою; довлѣетъ примѣтить, что точки c, d, e, f, g (по сочиненїю) помѣщены въ разсужденїи ab, какъ и точки C, D, F, G въ разсужденїи AB, понеже треугольники cab, dab, eab и проч. сдѣланы были подобными треугольникамъ CAB, DAB, EAB и проч. и расположены тѣмъ же порядкомъ. И такъ трудность, естьли есть какая, не можетъ быть какъ только въ точкахъ h, j, k; а какъ по сочиненїю точки h, i помѣщены въ разсужденїи ef, какъ точки H, J въ разсужденїи EF; по сему, когда сїи двѣ послѣднїя линеи помѣщены тѣмъ же порядкомъ въ разсужденїи линей ab и AB, точки h, i будутъ также помѣщены въ разсужденїи ab тѣмъ же порядкомъ какъ H и J въ разсужденїи AB. И такъ взаимныя разстоянїя точекъ a, e, f, g, и проч. смѣренныя по масштабу плана, покажутъ разстоянїя предмѣтовъ A, E, F, G и проч.

Довольно видимъ, не имѣя нужды больше настоять въ убѣжденїяхъ, что сїе самое средство можетъ послужить какъ для повѣрки точекъ, которыя подозрѣваешь сумнительными на какойлибо картѣ, такъ и для назначенїя нѣкоторыхъ опущенныхъ.

Можно также употреблять и компасъ для опредѣленїя положенїя предметовъ E, F, G и проч. который довольно часто и употребляютъ; но тогда примѣчаютъ при точкѣ A не углы EAB, FAB, но углы, кои линеи AE, AF, и проч.

и основанїе ав дѣлаютъ съ направленїемъ намагниченной стрѣлки; тоже дѣлаютъ и при точкѣ в. И дабы назначить предметы на картѣ, проводятъ чрезъ точку а линею представляющую направленїе намагниченной стрѣлки, и проводятъ линеи ab, ae, af и проч. такъ, чтобъ онѣ дѣлали съ нею углы замѣченные при точкѣ а; опредѣливъ потомъ величину, кою намѣреваются дать линеи ab, поступаютъ такимъ же образомъ и въ разсужденїи точки b, какъ поступили въ разсужденїи точки а. Что касается до точекъ н и ȷ, кои не были видны отъ а и в, опредѣляютъ ихъ въ разсужденїи еf такъ же, какъ опредѣлили другїя въ разсужденїи ав; на конецъ назначаютъ сїи точки, точками h и i, опредѣляя ихъ въ разсужденїи ef такъ же какъ и другїя точки е, f и проч. были опредѣлены въ разсужденїи ab.

Впрочемъ не надлежитъ, сколько возможно, снимать *такимъ образомъ* по компасу, какъ только *малѣйшїя подробности, на прим. извилины дороги, излучины рѣки и проч.* Когда главныя точки ужѐ опредѣлены съ точностїю, можно снимать сїи подробности съ не столь тщательнымъ вниманїемъ; понеже тогда у предметовъ, кои пеленгуютъ, и кои мало отстоятъ одинъ отъ другаго, погрѣшности могущїя послѣдовать на углахъ, не могутъ быть великой важности.

Когда нѣкоторыя обстоятельства принудятъ назначить на картѣ ужѐ сочиненной, нѣкую новую точку, не нужно замѣчать оную отъ двухъ извѣстныхъ точекъ: часто опредѣляютъ ее напротивъ того, замѣчая отъ сей самой точки, другїя двѣ извѣстныя. На пр. положимъ, что точка н есть точка рейда, въ коей измѣряли глубину лотомъ, которую хотятъ назначить на картѣ: замѣтятъ отъ точки н углы енм, fнм, которые сдѣланы двумя линеями ен, fн (про-

стирающимися къ двумъ извѣстнымъ предмѣтамъ E, F), съ направленiемъ намагниченной стрѣлки LM; потомъ, дабы назначить точку H на картѣ, проведутъ въ сторонѣ (ф. 77) линею lm, означающую направленiе намагниченной стрѣлки, и при какойнибудь точкѣ n сея линеи, сдѣлаютъ углы onm, pnm равные угламъ EHM, FHM; наконецъ чрезъ точку f проведутъ fh параллельную къ pn, а чрезъ точку e, линею eh параллельную къ no, сiи линеи встрѣтятся на искомой точкѣ h.

Сiе самое средство служитъ къ познанiю мѣста, гдѣ находишься на морѣ въ виду двухъ земель. Наконецъ лилея вѣтровъ, коя назначена на морскихъ картахъ, снабжаетъ пособiями для сокращенiя нѣкоторыхъ изъ сихъ дѣйствiй. Мы не можемъ войти въ подробности сего, кои непосредственно принадлежатъ къ Лоцiи. Довлѣетъ намъ показать начала, на коихъ основаны сiи различныя практическiя дѣйствiя.

При всемъ томъ, примѣтимъ сiе, что не должно опредѣлять глубину такимъ образомъ, какъ только тогда, когда обстоятельства иначе сдѣлать не позволяютъ. Ибо, сколь ни искусенъ бы кто былъ въ употребленiи пель-компаса, не можетъ отъ точки H на морѣ запеленговать предметы E и F съ такою точностiю, на которую бы столько можно было положиться, какъ на пеленгованiе предмета H, который будетъ или шлюпка или буеръ, учиненное отъ точекъ E и F на берегу. Назначенiе глубинъ столь важно, что должно стараться всѣми силами употреблять средства, для опредѣленiя ихъ, выгоднѣйшiя для точности.

Находится еще другое средство для снятiя плановъ, кое тѣмъ паче удобнѣе, что оно требуетъ не много прiуготовленiя, и въ тожъ время, какъ замѣчаютъ разныя точки, коихъ положенiе

имѣть желаютъ, назначаютъ ихъ на планѣ, не потерявъ ихъ изъ виду. Инструментъ употребляемый для сего представленъ въ фигурѣ 78. ABCD есть дощечка, длиною отъ 15ти, до 16ти дюймовъ, и столько же почти шириною, поставленная на ножкѣ, какъ и графометръ. На сїю дощечку натягиваютъ листъ бумаги и прикрѣпляютъ ее рамочкою, коя окружаетъ дощечку. LM есть линейка, при концахъ коея находится по мишенькѣ.

Когда желаешь сдѣлать употребленїе сего инструмента, который называется угломѣрнымъ столикомъ, для снятїя плана или какоголибо поля: возьми am за основанїе, какъ въ прошедшихъ дѣйствїяхъ, и поставь ножку инструмента на a. Воткни шестъ въ m, положи на бумагу линейку LM, и направь такъ, чтобъ видѣнъ былъ шестъ m сквозь двѣ мишеньки. Тогда проведи подлѣ линейки линею EF, по которой положи столько *мачтабныхъ частей* плана, сколько найдется футъ между точкою E, отъ коей теперь примѣчаешь, и точкою f, отъ коей будешь примѣчать во второе постановленїе угломѣрнаго стола. Потомъ оборачивай линейку около точки E, пока не увидишь, смотря сквозь мишеньки, котораго нибудь изъ предметовъ J, H, G; и какъ скоро усмотрѣлъ одинъ, проведи подлѣ линейки неопредѣленную линею. Такимъ образомъ пробѣжавъ всѣ предметы, кои можно видѣть, когда пришелъ на a, перенеси инструментъ на m, оставя шестъ на a. Тогда при точкѣ f дѣлай тѣже дѣйствїя надъ предметами J, H, G, кои сдѣлалъ на перьвомъ мѣстѣ. Линеи fi, fh, fg, кои въ семъ второмъ случаѣ простираются хотя умственно къ симъ предметамъ, встрѣчаются съ перьвыми на точкахъ g, h, i, кои суть изображенїе предметовъ G, H, J.

На той же еще теорїи подобныхъ фигуръ основывается способъ полагать на карту путь корабля, который онъ сдѣлалъ во время своего плаванїя, или во время части онаго.

Положимъ, что корабль, отправившись отъ извѣстнаго мѣста, проплылъ 28 лигъ на зюйдъ-остъ, потомъ 20 лигъ на зюйдъ, и наконецъ 26 лигъ на зюйдъ-вестъ, желательно опредѣлить на картѣ путь, коимъ онъ плылъ, и мѣсто пришествїя.

Тотчасъ ищутъ на картѣ точку его отшествїя; положимъ, что оное есть точка d (ф. 79). Подобнымъ образомъ ищутъ между двумя раздѣленїями линеи вѣтровъ, назначенной на картѣ, которая линея простирается на зюйдъ-остъ; положимъ, что она здѣсь линея cf; отъ точки d проводятъ линею dc параллельную къ cf, и полагаютъ по dc столько мачтабныхъ частей карты, сколько лигъ проплыто на зюйдъ-остъ. Отъ точки c *проводятъ также линею cb параллельную къ ce, коя идетъ къ зюйду;* и по bc полагаютъ столько частей мачтабныхъ, сколько проплыто лигъ на зюйдъ. Наконецъ отъ точки b проводятъ ba параллельную къ cd, идущей на зюйдъ-вестъ; и когда положишь по ba столько мачтабныхъ частей, сколько проплыто лигъ на зюйдъ-вестъ, точка a будетъ точка пришествїя, а назначенїе dcba представитъ путь переплытый кораблемъ. Самою вещїю линеи dc, cb, ba, дѣлаютъ между собою тѣже углы, кои сдѣлали между собою одинъ за другимъ разныя части пути корабля; и сверьхъ сего части cd, cb, ba имѣютъ между собою тѣже содержанїя, что и разстоянїя переплытыя кораблемъ; по сему фигура dcba есть (131) совершенно подобна пути, коимъ корабль плылъ. Наконецъ точка d назна-

чена на картѣ, какъ и точка отшествія въ разсужденіи земли*; и посему dcba не только подобна пути корабля, но еще и положена въ разсужденіи разныхъ точекъ карты, какъ путь корабля былъ въ разсужденіи разныхъ точекъ земли.

ОТДѢЛЪ ВТОРЫЙ.

О поверхностяхъ.

139. Достигли мы теперь до втораго изъ тѣхъ трехъ родовъ протяженій, кои мы уже различили, то есть до протяженія въ длину и ширину.

Въ семъ отдѣлѣ будемъ разсуждать о плоскостяхъ или о поверхностяхъ плоскихъ; и то только о фигурахъ прямолинейныхъ и о кругѣ.

Мѣра *поверхностей зависитъ отъ треугольниковъ или четыреугольниковъ.*

Четыресторонныя фигуры раздѣляются на просто называемые четыреугольники, на трапезіи и на параллелограммы.

Фигура о четырехъ сторонахъ, кою называютъ просто четыреугольникъ, есть та, между сторонами коея нѣтъ ни одной такой, которая бы была параллельна къ другой. См. фиг. 80.

* Сіе выраженіе безъ сомнѣнія не во всей строгости точно; но здѣсь не мѣсто утвердить совершенный его смыслъ. Точки карты, а особливо меркаторской, не имѣютъ того же положенія между собою, какое точки земли, кои онѣ представляютъ; но довольно здѣсь, чтобъ онѣ имѣли тоже употребленіе. Мы въ другомъ мѣстѣ возвратимся къ сему предмету.

Трапезїй есть фигура четыресторонная, коея двѣ только стороны параллельны. (ф. 81).

Параллелограммъ есть четыреугольникъ, имѣющїй сопротивныя стороны параллельныя (ф. 82, 83, 84, 85, 86, 86*). Параллелограммовъ находится четыре рода, а именно: ромбоидъ, ромбъ, прямоугольникъ и квадратъ.

Ромбоидъ есть параллелограммъ, коего смѣжныя стороны и углы не равны. (ф. 82).

Ромбъ есть также параллелограммъ, у коего всѣ стороны равны, а углы неравные (фиг. 83).

Прямоугольникъ есть тотъ, у коего всѣ углы равны, а смѣжныя стороны не равныя (фиг. 84).

Квадратъ есть тотъ, коего стороны и углы равны (ф. 85).

Когда углы четыреугольника равны, необходимо они прямые, потому что четыре угла всякаго четыреугольника вмѣстѣ равны четыремъ прямымъ угламъ (86).

Перпендикуляръ EF (ф. 82), проведенный между сопротивными сторонами параллелограмма, называется высотою сего параллелограмма; а сторона BC, на кою падаетъ сїя перпендикулярная, называется основанїемъ.

Высота треугольника ABC, (ф. 87, 88 и 89) есть перпендикуляръ AD, опущенный изъ одного угла A сего треугольника на сопротивную ему сторону BC, продолженную естьли потребно; и сїя сторона называется тогда его основанїемъ.

140. Всякой прямолинейной треугольникъ ABC (ф. 89) есть половина параллелограмма, тогоже съ нимъ основанїя и тойже высоты.

Ибо всегда можно провести отъ вершины угла C линею CE параллельную къ сторонѣ BA, и отъ вершины угла A линею AE параллельную

къ сторонѣ вс, кои со сторонами ав, вс составляютъ параллелограммъ авсе тогоже основанія и тойже высоты съ треугольникомъ авс; съ симъ подлогомъ легко видѣть можно, что два треугольника авс, сеа суть равны; ибо сторона ас у нихъ общая; сверьхъ сего углы вас, асе равны, поелику ав параллельна къ се (38); и для тойже причины углы вса и сае равны. Когда же два треугольника имѣютъ прилежащую сторону къ двумъ угламъ равнымъ единъ по единому ту же, то они равны; по сему треугольникъ авс есть половина параллелограмма авсе.

141. Параллелограммы авсd, евсf (ф. 86 и 86*) тогоже основанія и тойже высоты суть площадью равны.

Сіи два параллелограмма авсd, евсf (ф. 86) имѣютъ общую часть евсd; и такъ равенство ихъ зависитъ только отъ равенства треугольниковъ аве, dсf; и сіе легко доказать, что сіи *два треугольника равны: ибо ав равна сd, поелику сіи параллельныя линеи заключаются между параллельными* (82); по той же причинѣ и ве равна сf; сверьхъ сего (43) уголъ аве равенъ углу dсf. Когда же два треугольника имѣютъ по равному углу содержимому между равными сторонами едина по единой, то они равны; по сему и параллелограммъ авсd равенъ параллелограмму евсf.

На фигурѣ 86* можно доказать такимъ же образомъ, что два треугольника аве, dсf суть равные; по чему, когда отъ каждаго изъ оныхъ отъимемъ треугольникъ dje, остальные два трапезія авjd, ejсf будутъ равны. Наконецъ когда придадимъ къ каждому изъ сихъ трапезій треугольникъ вjс, параллелограммъ авсd и параллелограммъ евсf, кои отъ сего произойдутъ, будутъ равны.

142. Слѣдственно можно также сказать, что треугольники тогоже основанія и тойже высоты, или равныхъ основаній и равныхъ высотъ, суть равны: поелику они суть половины параллелограммовъ, тогоже основанія и той же высоты съ ними (140).

143. Изъ сего послѣдняго предложенія можно заключить, что всякой многоугольникъ можетъ обращенъ быть въ треугольникъ равный ему площадью. Напримѣръ, пусть будетъ ABCDE (ф. 91) пятиугольникъ; ежели проведемъ діагональ EC, соединяющую концы двухъ смѣжныхъ сторонъ ED, DC; и чрезъ точку D, проведши DF параллельную къ EC, и встрѣчающуюся съ AE продолженною на точкѣ F, проведемъ CF, будемъ имѣть четыреугольникъ ABCF равный площадью пятиугольнику ABCDE: ибо два треугольника ECD, ECF имѣютъ общее основаніе EC; сверьхъ сего заключаются между тѣми же параллельными EC, DF; по сему будутъ тойже высоты, слѣдовательно и равны; и такъ ежели приложимъ къ каждому изъ нихъ четыреугольникъ EABC, пятиугольникъ ABCDE будетъ равенъ четыреугольнику ABCF.

И такъ подобнымъ же образомъ, какъ пятиугольникъ обратили въ четыреугольникъ, обратимъ и четыреугольникъ въ треугольникъ, слѣдовательно и проч.

О мѣрѣ поверхностей.

144. Измѣрять поверхность называется, опредѣлить сколько разъ сія поверхность содержитъ въ себѣ другую извѣстную поверхность.

Употребляемыя мѣры суть обыкновенно квадраты, иногда также бываютъ и прямоугольные параллелограммы. И такъ измѣрять поверхность

ABCD (ф. 90) значитъ, опредѣлить сколько она содержитъ въ себѣ такихъ квадратовъ, какъ abcd, или прямоугольниковъ, какъ abcd; ежели сторона ab квадрата abcd есть футовая, то значитъ опредѣлить, сколько поверхность ABCD содержитъ въ себѣ квадратныхъ футъ; ежели сторона ab прямоугольника abcd есть футовая, а сторона bc трехъ-футовая, значитъ опредѣлить сколько разъ поверхность ABCD содержитъ въ себѣ прямоугольникъ, коего длина 3 фута, а щирина футъ.

Дабы измѣрить поверхность прямоугольника ABCD квадратами, должно сыскать сколько разъ сторона AB содержитъ въ себѣ сторону ab квадрата abcd, который долженъ служить единицею, или мѣрою; также сыскать, сколько разъ сторона BC содержитъ въ себѣ ab, и потомъ, умноживъ сіи числа одно на другое, будемъ имѣть число квадратовъ такихъ, какъ abcd, кое поверхность ABCD помѣстить въ себѣ можетъ. Напримѣръ: ежели AB содержитъ въ себѣ ab четыре раза, а BC туже ab семь разъ, умножаю 7 на 4, и произведеніе 28 означаетъ, что прямоугольникъ ABCD содержитъ въ себѣ 28 такихъ квадратовъ, какъ abcd.

Ибо, ежели чрезъ точки дѣленія E, F, G проведемъ параллельныя къ BC, будемъ имѣть четыре равные прямоугольника, изъ коихъ каждой можетъ содержать въ себѣ столько квадратовъ такихъ, какъ abcd, сколько частей въ сторонѣ BC, равныхъ ab; слѣдовательно должно взять столько разъ квадраты, содержимые въ одномъ изъ сихъ прямоугольниковъ, сколько прямоугольниковъ, то есть столько разъ, сколько сторона AB содержитъ въ себѣ ab, и какъ число квадратовъ содержимыхъ въ каждомъ прямоугольникѣ есть тоже, что и число частей въ BC, по сему яв-

ствуетъ, что, когда умножимъ число частей вс на число равныхъ частей прямыя ав, получимъ число такихъ квадратовъ, какъ abcd, кое прямоугольникъ авсd содержать въ себѣ можетъ.

Хотя мы и положили въ предложенномъ нами теперь разсужденіи, что стороны ав и вс содержатъ въ себѣ мѣру ab точно нѣсколько разъ, однако оно не меньше принадлежитъ и къ случаю, въ коемъ мѣра ab не будетъ содержима точно. На примѣръ: ежели бы вс содержала въ себѣ только 6 мѣръ и $\frac{1}{2}$, каждой прямоугольникъ содержалъ бы въ себѣ только 6 квадратовъ и $\frac{1}{2}$; и ежели бы сторона ав содержала въ себѣ только 3 мѣры и $\frac{1}{3}$, тогда было бы только три прямоугольника и $\frac{1}{3}$, каждой о шести квадратахъ и $\frac{1}{2}$; по сему надлежало бы умножить 6$\frac{1}{2}$ на 3$\frac{1}{3}$, то есть число мѣръ вс на число мѣръ ав.

145. Понеже (141) прямоугольный параллелограммъ авсd (ф. 86. 86*) равенъ параллелограмму евсf тогоже съ нимъ основанія и тойже высоты, по сему слѣдуетъ, что, дабы найти площадь онаго, должно умножить число частей его основанія вс, на число частей его высоты ав; по чему можно сказать вообще......

Дабы сыскать число квадратныхъ мѣръ, содержимыхъ въ площади какоголибо параллелограмма авсd (ф. 82), должно измѣрить основаніе вс, и высоту еf тоюже мѣрою, и умножить число мѣръ основанія, на число мѣръ высоты.

И по сему явствуетъ изъ сказаннаго (144), что, когда желаемъ узнать величину поверхности авсd (ф. 90), не иное должно намъ сдѣлать, какъ взять поверхность gвсн, или число квадратовъ въ ней содержимыхъ столько разъ, сколько ея сторона ав содержится въ сторонѣ ав; и такъ множимое есть самою вещію поверхность,

а множитель есть число простое, кое показываетъ только, сколько разъ должно взять сїе множимое.

Однако очень обыкновенно говорятъ, что, дабы найти площадь параллелограмма, должно умножить основанїе его высотою; но надобно на сїе смотрѣть какъ на сокращенное выраженїе, въ коемъ подразумѣваютъ число квадратовъ соотвѣтствующихъ частямъ основанїя; и число частей высоты. Словомъ, не можно сказать, что мы умножаемъ линею линеею. Умножать, значитъ, взять нѣсколько разъ; такъ что, когда умножаютъ линею, никогда не можно получить ни чего кромѣ линеи; и когда умножаютъ поверхность, не выдетъ никогда другаго кромѣ поверхности. Поверхность не можетъ имѣть другихъ стихїй или началъ, кромѣ поверхностей; и хотя часто говорятъ, что на параллелограммъ ABCD (ф. 82) можно смотрѣть какъ на *составленный изъ столь многихъ линей, равныхъ и параллельныхъ* BC, сколько находится точекъ въ высотѣ EF; однако должно подразумѣвать, что сїи линеи имѣютъ безпредѣльно малую ширину (ибо многїя линеи безъ ширины не составятъ поверхности); и тогда каждая изъ сихъ линей есть поверхность, коя, будучи взята столько разъ, сколько ея высота находится въ высотѣ AE, даетъ поверхность ABCD.

Не смотря на сїе мы примемъ сїе выраженїе: умножать линею линеею; но не должно терять изъ виду, что сїе есть только сокращенный образъ рѣчи. И такъ будемъ говорить, что произведенїе двухъ линей изображаетъ площадь; хотя въ самой вещи долженствовали бы сказать: число частей одной линеи умноженное числомъ частей другой, изображаетъ число квадратныхъ частей, содержимыхъ въ параллелограммѣ, имѣ-

ющемъ одну изъ сихъ линей высотою, а другую основанїемъ.

Для назначенїя площади параллелограмма ABCD (ф. 82), будемъ писать CB×EF; въ фигурѣ 84, напишемъ BA×BC; а въ 85, въ коей двѣ стороны AB и BC равны, вмѣсто AB×BC или AB×AB, будемъ писать AB^2; такъ что AB^2 будетъ значить линѣю AB умноженную саму на себя, или площадь квадрата сдѣланнаго на AB. Также, дабы изобразить, что линея AB возведена до куба, будемъ писать AB^3, что туже силу имѣть будетъ, какъ AB×AB×AB или AB^2×AB.

146. Изъ сказаннаго теперь нами слѣдуетъ, что, дабы имѣть два параллелограмма, равные площадью, довлѣетъ, ежели произведенїе основанїя на высоту одного, будетъ равно произведенїю основанїя на высоту другаго. По сему, когда два параллелограмма равны площадью, основанїя ихъ суть возвратно пропорцїональны ихъ высотамъ, т. е. что на основанїе и высоту одного можно смотрѣть какъ на крайнїе члены пропорцїи, коей основанїе и высота другаго составятъ среднїе; ибо смотря на нихъ такимъ образомъ, произведенїе крайнихъ равно произведенїю среднихъ; и такъ въ семъ случаѣ необходимо есть пропорцїя (Ариѳ. 180).

Впрочемъ истинну сїю можно видѣть безпосредственно: когда вникнемъ, что ежели основанїе одного меньше, на примѣръ, основанїя другаго, должно, чтобъ высота перьваго была соразмѣрно больше, дабы сдѣлать тоже произведенїе.

147. Понеже треугольникъ есть половина параллелограмма тогоже основанїя и тойже высоты (140), слѣдуетъ изъ теперь сказаннаго въ (145), что, дабы сыскать площадь треугольника, должно умножить основанїе высотою, и взять половину сего произведенїя.

И такъ, ежели высота AD (ф. 87) есть 34 хъ футъ, а основаніе BC 52 хъ, площадь будетъ содержать въ себѣ 884 квадратныхъ футъ, что и есть половина произведенія 52 хъ на 34.

Безполезно, думаю, утверждать доводами, что произведеніе всегда будетъ тоже, когда основаніе умножимъ половиною высоты, или высоту половиною основанія.

148. По сему, 1 е: Дабы сыскать площадь трапезія, должно сложить двѣ параллельныя линеи, взять половину оной суммы, и умножить перпендикуляромъ проведеннымъ между сими двумя параллельными. Ибо, ежели проведешь діагональ BD (ф. 81), будутъ два треугольника ABD, BDC, коихъ общая высота есть EF. Для сысканія площади треугольника ABD должно умножить половину AD линеею EF; а для сысканія площади треугольника BDC должно умножить половину BC тоюже EF; слѣдовательно площадь трапезія равна половинѣ AD, умноженной на EF вмѣстѣ съ половиною BC, умноженной на EF, т. е. половинѣ суммы AD съ BC умноженной на EF.

Ежели отъ средины G линеи AB проведешь GH параллельную къ BC, сія линея GH будетъ половина суммы двухъ линей AD и BC. Ибо, пусть будетъ J точка, на коей GH пересѣкаетъ діагональ BD, подобные треугольники BAD, BGJ, по причинѣ параллельныхъ AD и GJ, даютъ знать (109), что GJ половина AD, понеже BG половина AB. И такъ, когда GH параллельна къ BC и AD; DC по (102) разсѣчена также какъ и AB; и по сему такимъ же образомъ докажемъ, что JH есть половина BC, взявъ въ разсужденіе подобные треугольники BDC и JDH.

Слѣдовательно, въ силу сказаннаго выше, можно сказать, что площадь трапезія ABCD,

равна произведенію высоты EF на линею GH, проведенную въ равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ сопротивныхъ основаній.

149. 2 с. Дабы найти площадь какого нибудь многоугольника, должно раздѣлить его на треугольники линеями проведенными отъ тойже точки ко всякому изъ его угловъ, и раздѣльно вычислить площадь каждаго изъ сихъ треугольниковъ; сложивъ всѣ сіи площади, получишь всю площадь многоугольника. Но дабы, сколь возможно, имѣть меньшее число треугольниковъ, приличнѣе будетъ проводить всѣ сіи линеи отъ одного изъ угловъ; смотри фигуру 92.

150. Ежели многоугольникъ будетъ правильной (ф. 53): какъ всѣ его стороны, и всѣ перпендикуляры, опущенные изъ центра, суть также равны; то представя, что онъ составленъ изъ треугольниковъ имѣющихъ вершины свои при центрѣ, площадь его найдешь, когда одну изъ его сторонъ умножишь половиною перпендикуляра, и произведеніе сіе числомъ сторонъ; или, что все тоже, когда обмѣръ многоугольника умножишь половиною перпендикуляра.

151. Понеже можно смотрѣть (136) на кругъ, какъ на правильной многоугольникъ безчисленнаго множества сторонъ, по сему должно заключить, что, дабы найти площадь круга, должно окружность его умножить половиною радіуса.

Ибо перпендикуляръ проведенный на одну изъ его сторонъ не различествуетъ отъ радіуса, когда число сторонъ безконечное.

152. Поелику окружности круговъ суть между собою какъ радіусы или діаметры оныхъ (136), очевидно, что, ежели бы знали окружность круга, у коего діаметръ извѣстенъ, легко бы можно было опредѣлить окружность всякаго другаго

круга, коего діаметрЪ извѢстенЪ; понеже дѢло бы состояло только вЪ томЪ, что бы сыскать четвертую пропорціональную сея пропорціи: діаметрЪ извѢстной окружности, кЪ сей самой окружности такЪ, какЪ діаметрЪ искомой окружности, кЪ оной второй окружности.

Содержаніе діаметра кЪ окружности вЪ точности намЪ не извѢстно, но имѢемЪ сравненіе оныхЪ столь близкое, что на точнѢйшее можно смотрѢть какЪ на со всемЪ безполезное вЪ практикѢ.

АрхимедЪ нашелЪ, что кругЪ, коего діаметрЪ 7 футЪ, будетЪ имѢть окружность близко 22 футЪ. И такЪ, естьли спросятЪ, какая будетЪ окружность круга, коего діаметрЪ 20 футЪ, должно сыскать (Ариѳ. 179) четвертый членЪ пропорціи, коея три первые суть 7:22::20. Сей четвертый членЪ, который будетЪ $62\frac{6}{7}$, есть почти долгота окружности круга, коего діаметрЪ 20 футЪ. Я говорю почти; ибо должно, что бы кругЪ имѢлЪ не менѢе 800 футЪ вЪ діаметрѢ, дабы вЪ опредѢленной окружности по содержанію 7:22 была ошибка на футЪ. ВЪ прочемЪ употребляя содержаніе 7:22, можно и не дѢлать пропорціи; довлѢетЪ утроить діаметрЪ и кЪ произведенію прибавить седьмую часть сего самаго діаметра; потому что $3\frac{1}{7}$ есть число разЪ, сколько 22 содержитЪ вЪ себѢ 7.

АдріанЪ МецїйЪ сообщилЪ намЪ гораздо ближайшее содержаніе; оно есть 113 : 355. Сіе содержаніе таково, что должно діаметру круга быть 1,000,000 футЪ по крайней мѢрѢ, дабы при упо-

требленіи сего содержанія, погрѣшность въ окружности была на футъ *.

На конецъ естьли потребно имѣть окружность въ бо́льшей точности, употребляй содержаніе 1цы къ 3,14159265358979З2, кое уже очень преходитъ границы нуждъ обыкновенныхъ, и въ коемъ всегда можемъ убавить больше или меньше цифръ съ правой руки, смотря, великая, или малая настоитъ нужда въ точности. И какъ сего содержанія перьвый членъ 1ца, оно и очень удобно для сысканія окружности предложеннаго круга, понеже должно только умножить число 3,1415926 и проч. діаметромъ сего даннаго круга.

Теперь очень уже легко сыскать площадь даннаго круга, по крайней мѣрѣ столь точно, сколь величайшія нужды въ практикѣ потребовать могутъ.

Естьли спросятъ, сколько квадратныхъ футъ въ площади круга, коего діаметръ 20 футъ, вычисляю его окружность, какъ выше показано, и нашедъ, что она $62\frac{6}{7}$ футъ, умножаю оныя $62\frac{6}{7}$ на 5 футъ, кои суть половина радіуса (151), и нахожу $314\frac{2}{7}$ квадратныхъ футъ въ площади сего круга.

153. Секторомъ круга называютъ поверхность, содержимую между двумя радіусами JA, JB, (ф. 74) и дугою AVB.

А сегментомъ или отсѣкомъ, поверхность, содержимую въ дугѣ AVB и ея хордѣ AB.

Понеже на кругъ можно смотрѣть, какъ на правильной многоугольникъ безчисленнаго множе-

* Дабы легче упомнить сіе содержаніе, должно примѣтить, что, перьвыя три нечотныя числа 1, 3, 5, его составляющія, написаны по два по порядку такъ, что, когда раздѣлишь по поламъ оныя, будетъ сіе самое содержаніе, а именно: 113 : 355.

ства сторонъ, слѣдовательно и на секторъ круга можно также смотрѣть, какъ на часть правильнаго многоугольника, и на площадь его, какъ на составленную изъ безчисленнаго множества треугольниковъ, имѣющихъ всѣ свои вершины при центрѣ, а высотою радїусъ. По сему, дабы найти площадь сектора круга, должно умножить дугу, служащую ему основанїемъ половиною радїуса.

Что касается до сегмента или отсѣка, очень видно, что, для сысканїя его площади, должно отнять площадь треугольника JAB отъ площади сектора JAVB.

Явствуетъ, что въ томъ же кругѣ долготы дугъ пропорцїональны числамъ ихъ градусовъ; и по сему, когда извѣстна длина окружности, можемъ опредѣлить и длину дуги, какихъ бы градусовъ она ни была, сдѣлавъ сїю пропорцїю: 360°, суть къ числу градусовъ дуги, коея ищемъ долготу, такъ какъ длина окружности, къ длинѣ сей самой дуги.

Естьли потребно сыскать площадь сектора, коего извѣстно число градусовъ и радїусъ, найди по пропорцїи, лишь теперь предложенной, долготу дуги, коя есть основанїе сего сектора, и потомъ умножь оную на половину радїуса. На пр: когда спросятъ площадь сектора 32°, 40′ въ кругѣ коего дїаметръ 20 футъ, найдешь, какъ показано выше (151), что окружность круга есть $62\frac{6}{7}$ футъ; потомъ сыщи къ тремъ числамъ четвертое пропорцїональное, кои суть: 360° : 32°. 40′ :: $62\frac{6}{7}$; сей четвертый членъ, который найдется $5\frac{19}{27}$, будетъ долгота дуги 32°, 40′, кою умноживъ 5ю, половиною радїуса, получишь $28\frac{14}{27}$ для площади сектора 32°, 40′.

Послѣ сего легко уже сыскать площадь сегмента, когда опредѣлишь (ф. 74) сторону AB и

высоту JZ треугольника JAB дѣйствїемъ, основаннымъ на тѣхъ же началахъ, кои показаны въ (121); но Тригонометрїя, кою въ послѣдованїи увидимъ, покажетъ намъ средства гораздо кратчайшїя и ближайшїя къ точности.

154. Хотя сказанное нами (149) и достаточно для измѣренїя всякихъ прямолинейныхъ фигуръ, однако не непристойно предложить здѣсь другое средство, простѣйшее для практики. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: (ф. 93) проведи линею AG, и изъ каждаго изъ угловъ опусти къ оной AG перпендикуляры BM, LC, DK, EJ, FH; смѣряй каждую изъ сихъ линей, также и разстоянїя AN, NO, OP, PQ, QR, RG; тогда оная фигура будетъ раздѣлена на многїя части, изъ коихъ крайнїя только треугольники, а прочїя трапезїи. Треугольниковъ площадь сыщешь, когда высоту умножишь половиною основанїя (147); чтожъ касается до трапезїй, ихъ площадь получишь, когда полсуммы двухъ параллельныхъ умножишь перпендикуляромъ между оными проведеннымъ (148).

Когда же фигура будетъ обведена кривою линеею, можно и оной сыскать площадь въ практикѣ съ довольною точностїю, раздѣливъ линею AT (ф. 94), проведенную по самому должайшему мѣсту фигуры, на столь многое число частей, чтобы дуги между сѣченїями AB, BC, CD и проч. можно было взять за прямыя линеи; и, дабы вычисленїе было сколь возможно простѣе, сдѣлай части AO, OP и проч. равныя между собою; тогда для сысканїя площади оныя, сложи всѣ линеи BN, CM, DL, EK, FJ и половину только послѣдней GH, естьли кривая линея окружающая фигуру, ограничена прямою GH, перпендикулярною къ AT; потомъ сумму оную умножь однимъ разстоянїемъ AO; произведенїе оное будетъ искомая площадь. Сїе непосредственно слѣдуетъ изъ сказаннаго въ

(148). Ибо, чтобы сыскать площадь фигуры ABN. должно AC умножить половиною BN; а для сыскания въ BCMN, должно умножить OP или AO половиною BN и CM; и для CDLM должно AO умножить половиною CM и DL; также и прочія: по сему, сложивъ сіи произведенія, увидишь, что AO будетъ умножена двумя половинами BN вмѣстѣ съ двумя половинами CM, вмѣстѣ съ двуми половинами DL, вмѣстѣ съ двумя половинами EK, вмѣстѣ съ двумя половинами FI, вмѣстѣ наконецъ съ одною половиною HG; т. е. что AO должна быть умножена суммою линей BN, CM, DL, EK, FI, вмѣстѣ съ половиною послѣдния.

Естьли бы потребно было найти площадь фигуры BNHG, ограниченной двумя линеями BN и GH: возьми только половину BN; а не цѣлую.

Правило показанное нами для измѣренія поверхностей плоскихъ, ограниченныхъ кривыми линеями, можетъ съ великою пользою приложено быть къ разнымъ изысканіямъ надлежащимъ до судовъ. Часто случается въ сихъ изысканіяхъ, что потребно бываетъ находить площадь горизонтальной плоскости судна; въ послѣдованіи будемъ имѣть случай показать сего употребленіе.

О измѣреніи поверхностей саженями.

155. Чрезъ измѣреніе поверхностей саженями, разумѣемъ образъ дѣланія нужныхъ умноженій для вычисленія площадей, когда измѣрены ихъ протяженія саженями и частями сажени.

Въ вычисленіи площадей квадратными саженями, квадратными футами, квадратными дюймами, квадратными линеями, и проч: сажень квадратная содержитъ въ себѣ 49 квадратныхъ футъ, поелику она есть прямоугольникъ, у коего

7 футъ въ длину и 7 въ ширину. Квадратной футъ содержитъ 144 квадратныхъ дюймовъ, понеже онъ есть прямоугольникъ, у коего 12 дюймовъ въ длину и 12 въ ширину. По тойже причинѣ явствуетъ, что квадратной дюймъ содержитъ 144 квадратныхъ линей.

И такъ, дабы вычислить площадь въ квадратныхъ саженяхъ и квадратныхъ частяхъ квадратной сажени, должно только привести два ея протяженія, кои должно одно на другое умножить, въ нижщій сортъ (на прим. въ линеи, естьли самый нижщій сортъ есть линеи); приведенные умноживъ одно на другое, произведеніе обрати въ квадратные дюймы, потомъ въ квадратные футы, и наконецъ въ квадратныя сажени, раздѣляя одно за другимъ на 144, 144 и 49. На примѣръ, дабы найти площадь прямоугольника, у коего длина 2 саж. 3 ф, 5 д, а ширина ос, 4 ф, 6 д; сіи два протяженія привожу въ дюймы, и получаю 209 д, и 54 д; кои умноживъ, получаю 11286 квадратныхъ дюймовъ, что и пишется такъ: 11286 дд. Дабы обратить ихъ въ квадратные футы, раздѣляю оные на 144; и получаю 78 квадратныхъ футъ и 54 дд въ остаткѣ, т. е. 78 фф. 54 дд. Для приведенія 78 фф въ квадратныя сажени, раздѣляю на 49; получаю въ частномъ одну квадратную сажень или 1сс и 29 фф въ остаткѣ; такъ что искомая площадь есть 1сс. 29 фф. 54 дд.

Всякъ видитъ, что здѣсь нѣтъ новаго правила къ изученію для отправленія таковыхъ умноженій, кои очевидно тѣже съ показанными нами въ Ариѳметикѣ подъ именемъ умноженія чиселъ съ наименованіемъ. И такъ, чтобы не предлагать много примѣровъ, естьли меня спросятъ, какая будетъ площадь прямоугольника имѣющаго 36 с. 5 ф. 7 д. въ длинѣ и 48 с. 3 ф.

9 д въ ширинѣ, поступаю слѣдующимъ образомъ:
36 с×7 = 252 ф + 5 = 257 ф × 12 = 3084 д + 7 = 3091 д
28 ×7 = 196 + 3 = 199 × 12 = 2388 + 9 = 2397
3091 × 2397 = 7409127 дд, кои раздѣливъ прежде на 144, получимъ 51452 фф, и 39 въ остаткѣ; сіи квадратные футы раздѣля на 49, получимъ 1050 сс, и 2 фф. въ остаткѣ; такъ что искомая площадь будетъ 1050 сс. 2 фф. 39 дд *.

156. Понеже для сысканія площади въ параллелограммѣ должно умножить число частей основанія на число частей высоты; изъ сего слѣдуетъ (Ариѳ. 74), что, естьли извѣстна площадь и число частей высоты или основанія, и естьли пожелаешь сыскать основаніе или высоту, должно раздѣлить число изображающее площадь, на число изображающее одно изъ двухъ протяженій, кое будетъ извѣстно. Возьмемъ для объясненія сего предъ симъ показанной примѣръ. Пусть дана будетъ площадь прямоугольника 1050 сс. 2 фф. 39 дд а 28 с. 3 ф. 9 д высота его: надлежитъ сыскать его основаніе. Поступаю, какъ слѣдуетъ:

1050 сс. 2 фф. 39 дд = 7409127 дд; а 28 с. 3 ф. 9 д = 2397; на сіе число раздѣляю первое и получаю въ частномъ 3091 д, кои, приведши въ сажени и футы, какъ показано было въ Ариѳметикѣ, нахожу, что основаніе его есть 36 с. 5 ф. 7 д.

О сравненіи поверхностей.

157. Площади параллелограммовъ суть между собою вообще, какъ произведенія основаній на высоты.

---

* Можемъ сіи числа съ наименованіемъ умножать, не приводя ихъ въ нижшій сортъ, чему всякъ изъ учащихъ при семъ случаѣ и примѣры показать можетъ.

То есть, что площадь одного параллелограмма содержитъ площадь другаго столько же, сколько произведенiе основанiя на высоту перьваго содержитъ произведенiе основанiя на высоту втораго.

Сiе очевидно, понеже всякой параллелограммъ равенъ произведенiю основанiя на высоту.

Отсюду легко заключить, что, когда два параллелограмма имѣютъ туже высоту, они суть между собою, какъ ихъ основанiя; и что, когда тогоже основанiя, суть между собою, какъ ихъ высоты. Ибо содержанiе произведенiй не перемѣнится, ежели оставленъ будетъ въ каждомъ сомножитель, который имъ есть общiй (Ариѳ. 170).

158. Понеже треугольники суть (140) половины параллелограммовъ тогоже основанiя и тойже высоты, посему должно заключить, что и треугольники тойже высоты суть между собою, какъ ихъ основанiя; и треугольники тогоже основанiя суть между собою, какъ ихъ высоты.

159. Площади подобныхъ параллелограммовъ и треугольниковъ суть между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.

Ибо площади двухъ параллелограмовъ ABCD и abcd (ф. 96 и 97), суть между собою (157), какъ произведенiя основанiй на ихъ высоты; т. е. что ABCD : abcd :: BC×AE : bc×ae. Но ежели параллелограммы ABCD, abcd суть подобны, и ежели AB и ab суть ихъ двѣ сходственныя стороны, треугольники AEB, aeb будутъ подобны, поелику сверхъ того, что углы E и e прямые, они должны имѣть еще уголъ B равный углу b; по сему будетъ (108) AE : ae :: AB : ab, или BC : bc по причинѣ подобныхъ параллелограммовъ; слѣдовательно въ произведенiяхъ по (99) BC×AE и bc×ae можно вставить содержанiе BC : bc вмѣсто AE : ae;

и тогда содержаніе сихъ произведеній будетъ BC^2: bc^2; по сему $ABCD : abcd :: BC^2 : bc^2$; и какъ можно взять безъ разбору ту или другую сторону за основаніе, почему явствуетъ, что вообще площади подобныхъ параллелограммовъ суть между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.

160. Въ разсужденіи подобныхъ треугольниковъ, очевидно, что они имѣютъ тоже свойство, понеже они суть половины параллелограммовъ тогоже съ ними основанія и тойже высоты.

161, Вообще площади двухъ какихъ либо подобныхъ фигуръ суть между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ или сходственныхъ линей сихъ фигуръ.

Ибо на площади двухъ подобныхъ фигуръ всегда можно смотрѣть, какъ на составленныя изъ тогоже числа треугольниковъ подобныхъ каждый каждому; тогда площадь каждаго треугольника первой фигуры будетъ къ площади соотвѣтствующаго треугольника второй, какъ квадратъ стороны перваго, къ квадрату сходственной стороны втораго (160); по сему, поелику всѣ сходственныя ихъ стороны въ томъ же содержаніи, ихъ квадраты должны быть также всѣ въ томъ же содержаніи (Ариѳ. 19), будетъ и каждый треугольникъ перваго многоугольника, къ соотвѣтствующему треугольнику втораго, какъ квадратъ которой нибудь стороны перьваго многоугольника, къ квадрату сходственной стороны втораго; слѣдственно по (Ариѳ. 186) сумма всѣхъ треугольниковъ перваго будетъ къ суммѣ всѣхъ треугольниковъ втораго, или площадь перваго къ площади втораго будетъ въ томъ же содержаніи.

162. Площади круговъ суть по сему между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.

Ибо круги суть подобныя фигуры (136), коихъ радїусы и дїаметры суть сходственныя линеи.

Тоже должно сказать о секторахъ и сегментахъ тогоже числа градусовъ.

И такъ изъ сего видно; что площади подобныхъ фигуръ не суть между собою, какъ ихъ обмѣры; обмѣры послѣдуютъ простому содержанїю сторонъ (134); т. е. что двухъ подобныхъ фигуръ, ежели сторона одной фигуры двукратна или трекратна или четырекратна и проч. сходственной стороны другїя, обмѣръ первой будетъ также двукратенъ, трекратенъ или четырекратенъ обмѣра другїя; но площади ихъ не суть таковы; площадь первой фигуры будетъ тогда въ четверо, въ девятеро, въ шеснатцать разъ и проч. больше площади вторыя.

Сїю истинну можно сдѣлать ощутительною фигурами 98 и 99, въ коихъ, смотря на фиг. 98, видимъ, что параллелограммъ ABCD, коего сторона AB есть двукратна стороны AG подобнаго ему параллелограмма AGJE, содержитъ въ себѣ четыре параллелограмма совершенно равныхъ параллелограмму AGJE; смотря же на 99 фигуру, видимъ, что треугольникъ ADF, коего сторона AD двукратна стороны AB подобнаго ему треугольника ABC, содержитъ въ себѣ четыре треугольника равные треугольнику ABC; подобно треугольникъ AGK, коего сторона AG трекратна стороны AB, содержитъ въ себѣ девять треугольниковъ равныхъ треугольнику ABC. Тоже самое будетъ и на кругахъ; кругъ, у коего радїусъ двукратенъ, трекратенъ, или четырекратенъ и проч. радїуса другаго круга, будетъ содержать въ себѣ 4 раза, 9 разъ или 16 разъ и проч. площадь сего другаго круга.

Отсюду видно, что два судна, совершенно подобныя, имѣли бы такїя парусности *, коихъ

---

* Парусность разумѣется собранїе всѣхъ парусовъ на кораблѣ.

поверхности были бы между собою, какъ квадраты высотъ мачтъ; т. е. (что изъ послѣдствія увидимъ) какъ квадраты долготъ судовъ или ихъ широтъ: и потому можемъ также сказать, что два подобныя судна, и коихъ парусности поставлены въ одинаковомъ направленіи, получаютъ такія количества вѣтра, кои суть, какъ квадраты долготъ сихъ судовъ. Однако изъ сего не должно заключить, что ихъ скорости будутъ въ томъ же содержаніи. Мы увидимъ въ Механикѣ, какое оно быть долженствуетъ.

Въ прочемъ мы не изслѣдываемъ, должны ли подобныя суда имѣть подобные паруса; такое изслѣдованіе также надлежитъ до Механики.

163. Посему, естьли бы потребовалось составить фигуру подобную другой, и коея площадь была бы къ сей другой въ данномъ содержаніи, на прим. въ содержаніи 3 къ 2; не должно бы дѣлать сходственныя ихъ стороны въ содержаніи 3 къ 2, ибо тогда площади ихъ были бы въ содержаніи 9 къ 4; но надобно бы сдѣлать сіи стороны такой величины, чтобъ ихъ квадраты были между собою : . 3 : 2; т. е. положивъ, что сторона ав фигуры х (ф. 100) 50 ф. на прим: должно для сысканія сходственной стороны аb искомой фигуры *x* (фиг. 101) сыскать четвертый членъ пропорціи, коея три первыя были бы $3:2::50^2$ или 50×50 къ четвертому; сей четвертый членъ, который есть $1666\frac{2}{3}$, будетъ квадратъ стороны аb; чего для извлекши квадратный корень (Ариѳ. 145) изъ $1666\frac{2}{3}$, получишь 40 ф, 824, т. е. почти 40 ф. 9 д, 10 л. для стороны ав. Когда же имѣешь одну сторону фигуры х, удобно составить оную фигуру по сказанному (133).

164. Ежели на трехъ сторонахъ ав, вс, ас прямоугольнаго треугольника авс (ф. 102) составлены будутъ три квадрата веfа,

BGHC, AJLC: квадратъ ипотенузы равенъ всегда суммѣ двухъ прочихъ.

Изъ прямаго угла B опустимъ на ипотенузу AC перпендикулярную BD; каждый изъ двухъ треугольниковъ BAD, BDC будетъ подобенъ треугольнику ABC (112): слѣдовательно площади сихъ трехъ треугольниковъ будутъ между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ; по сему будемъ имѣть сїи равныя содержанїя $ABD : AB^2 :: BDC : BC^2 :: ABC : AC^2$ или $ABD : ABEF :: BDC : BGHC : ABC : AJLC$; слѣдовательно (Ариѳ. 186) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC\ AJLC$. И какъ очевидно, что ABC равенъ двумъ частямъ $ABD + BDC$; по сему квадратъ AJLC равенъ $ABEF + BGHC$, что можно изобразить еще такъ: AC^2 равенъ $AB^2 + BC^2$.

165. Понеже квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ сторонъ около прямаго угла, заключимъ, что *квадратъ одной изъ сторонъ около прямаго угла равенъ квадрату ипотенузы безъ квадрата другой стороны*; т. е. что BC^2 равенъ $AC^2 - AB^2$ и AB^2 равенъ $AC^2 - BC^2$.

166. По сему, когда извѣстны двѣ стороны прямоугольнаго треугольника, всегда можно найти третїю. Положимъ, на прим. что сторона AB 12 футъ, сторона BC 25 футъ, спрашиваютъ ипотенузу AC. Слагаю 144, квадратъ стороны AB съ 625, квадратомъ стороны BC, сумма 769 равна квадрату ипотенузы AC; и такъ естьли извлеку квадратный корень изъ 769, получу ипотенузу AC; сей корень есть 27, 73 по крайности одною сотою близко, слѣдовательно сторона AC будетъ 27, 73 футъ, т. е. 27 ф. 8 д. 9 л.

Ежели напротивъ того была бы одна ипотенуза, и одна изъ сторонъ, другую нашли бы, какъ лишь сказано (въ 165). На прим. ежели бы ипотенуза AC была 54 фута, а сторона BC 42, и спросили бы, многихъ ли футъ сторона AB;

тогда бы изъ 2916 ти, кое есть квадратъ ипотенузы 54 хъ, отнялъ я 1764, кое есть квадратъ стороны вс, остатокъ 1152 былъ бы равенъ квадрату стороны ав; по извлеченіи же квадратнаго корня изъ 1152, оный корень, который есть 33, 94, былъ бы равенъ ав; т. е. что ав была бы почти 33ф. 94 или 33ф. 11 д. 3 л.

Сіе предложеніе весьма полезно; въ послѣдованіи много будемъ имѣть случаевъ убѣдить себя въ ономъ.

167. Понеже квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ сторонъ около прямаго угла, слѣдуетъ, что, ежели прямоугольный треугольникъ будетъ равнобедренный, какъ случается, на прим. въ квадратѣ, когда проведутъ діагональ ас (ф. 103), квадратъ ипотенузы будетъ двукратенъ квадрата одной изъ его сторонъ: по сему площадь одного квадрата къ площади квадрата написаннаго на діагоналѣ, будетъ какъ 1 къ 2; и такъ (по Ариѳ. 192) сторона одного квадрата къ его діагонали, какъ 1 къ квадратному корню 2 хъ; и какъ сей корень не можетъ быть выраженъ числами въ точности, изъ сего слѣдуетъ, что не можно имѣть точно въ числахъ содержанія стороны квадрата къ его діагонали, т. е. что діагональ есть линея несовмѣримая или не имѣющая ни какой общей мѣры со своею стороною.

168. Въ доказательствѣ подъ No. 164 видѣли мы, что подобіе треугольниковъ авс, adb, cdb производитъ $abc : ac^2 :: adb : ab^2 :: bdc : bc^2$ или какъ $abc : adb : bdc :: ac^2 : ab^2 : bc^2$; но треугольники авс, adb, bdc, будучи всѣ три той же высоты, суть между собою, какъ ихъ основанія (158); по сему $abc : adb : bdc :: ac : ad : dc$; слѣдственно и $ac^2 : ab^2 : bc^2 :: ac : ad : dc$; чего ради квадратъ на ипотенузѣ къ каждому изъ

квадратовъ на двухъ прочихъ сторонахъ, какъ самая ипотенуза къ каждому изъ прилежащихъ симъ сторонамъ сегментовъ или отсѣковъ.

169. Отсюду можно вывесть средство дѣлать то на линеяхъ, что мы показывали на числахъ (163); т. е. составлять фигуру *x* подобную предложенной фигурѣ x (ф. 100 и 101), и коея бы площадь была къ площади первой въ данномъ содержанiи.

Проведи (ф. 104) неопредѣленную линею DE, на коей возьми двѣ части DP и PE такiя, чтобъ DP была къ PE, какъ площадь данной фигуры x (ф. 100) должна быть къ площади искомой фигуры *x* (ф. 101), т. е. :: 3 : 2, ежели желаютъ, чтобъ *x* была $\frac{2}{3}$ фигуры x. На DE (ф. 104), какъ на дiаметрѣ, напиши полкруга DBE, и при точкѣ P, возставивъ перпендикуляръ PB, проведи отъ точки B, на коей она встрѣчается съ окружностiю, къ двумъ концамъ D и E хорды DB, BE. На DB возьми BA, равную сторонѣ AB фигуры x, и, проведши AC параллельную къ DE, получишь BC, сходственную сторону искомой фигуры *x*, кою потомъ и составишь, какъ показано (133). Причина сему слѣдующая: Площадь фигуры x должна быть къ площади фигуры *x* какъ квадратъ стороны AB къ квадрату искомой стороны ab, т. е. :: $AB^2 : ab^2$; и какъ потребно, чтобъ сiи двѣ площади были одна къ другой :: 3 : 2; по сему должно, чтобъ $AB^2 : ab^2 :: 3 : 2$. И какъ (ф. 104) AB : BC :: BD : BE, слѣдовательно (Ариѳ. 191) $AB^2 : BC^2 :: BD^2 : BE^2$; но какъ треугольникъ DBE есть прямоугольный, будетъ (168) $BD^2 : BE^2 :: DP : PE$, т. е. :: 3 : 2; по чему $AB^2 : BC^2 :: 3 : 2$; также и $AB^2 : BC^2 :: AB^2 : ab^2$; по сему ab должна быть равна BC.

170. Слѣдуетъ еще изъ сказаннаго (168), что квадраты хордъ AC, AD и проч. проведенныхъ отъ одного конца діаметра AB (ф. 105) суть между собою, какъ части AP, AO, отдѣляемыя перпендикулярами, опущенными на оный отъ концовъ сихъ хордъ.

Ибо проведши хорды BC и BD, получишь (168) въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC;

$$AB^2 : AC^2 :: AB : AP,$$

и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB,

$$AD^2 : AB^2 :: AO : AB$$

по сему (100) $AD^2 : AC^2 :: AO : AP$.

О плоскостяхъ.

171. Показавъ о мѣрѣ и содержаніяхъ плоскихъ поверьхностей, не остается намъ инаго, дабы могли мы приступить къ тѣламъ, какъ изслѣдывать свойства прямыхъ линей въ разныхъ ихъ положеніяхъ въ разсужденіи плоскостей, и свойства самыхъ плоскостей въ разныхъ ихъ положеніяхъ между собою; о чемъ мы и намѣрены теперь предложить.

Мы не полагаемъ ни какой величины ниже опредѣленной фигуры плоскостямъ, о коихъ мы намѣрены разсуждать, а полагаемъ оныя протяженными неопредѣленно во всѣ стороны; и естьли представляемъ ихъ въ видѣ нѣкоторыхъ фигуръ, сіе дѣлаемъ единственно для облегченія нашего воображенія.

172. Прямая линея не можетъ быть одною своею частію на плоскости, а другою на возвышенной или пониженной плоскости въ разсужденіи перьвой.

Ибо (5) плоскость есть такая поверьхность, къ коей можно приложить прямую линею точно и вездѣ.

173. Также и часть плоскости не можетъ быть на плоскости, а другая внѣ ея.

Ибо прямая линея, коя будетъ проведена на части плоскости общей симъ двумъ плоскостямъ, будучи неопредѣленно продолжена на той и на другой плоскости, будетъ находиться частію на одной изъ сихъ плоскостей, а другою на возвышенной или пониженной въ разсужденіи перьвой, что не возможно (172).

174. Двѣ прямыя АВ и CD (ф 106) пресѣкающіяся взаимно, суть на тойже плоскости.

Ибо очевидно, что можно провесть плоскость чрезъ одну изъ сихъ линей АВ, и чрезъ точку взятую по произволенію на другой; и какъ Е точка сѣченія, принадлежа къ АВ находится на проведенной плоскости, по сему линея CD имѣетъ двѣ точки на сей плоскости, слѣдовательно и вся она находится на ней.

175. Пресѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линея.

Понеже каждая изъ двухъ плоскостей не имѣетъ толщины, сѣченіе ихъ должно быть линея: сверхъ сего она должна быть и прямая; ибо прямая линея, проведенная чрезъ двѣ точки сего сѣченія, необходимо будетъ вся на каждой изъ сихъ двухъ плоскостей, и по сему она есть самое сѣченіе.

176. И такъ чрезъ туже прямую линею можно провесть безчисленное множество разныхъ плоскостей.

177. Линея перпендикулярная къ плоскости называется, когда она не наклоняется ни на которую сторону сея плоскости.

178. Ежели АВ перпендикулярна къ плоскости GE (ф. 107), то перпендикулярна она

ко всѣмъ прямымъ вс, вс, вс и проч. кои можно провести чрезъ точку ея встрѣчи съ сею плоскостію. Ибо, естьли бы находилась одна, къ коей бы она была не перпендикулярна, тогда бы наклонялась къ сей линеи, слѣдственно и къ плоскости.

179. Когда линея ав (ф. 108) перпендикулярна къ плоскости ge, и ежели чрезъ в, точку ея встрѣчи съ плоскостію, проведутъ линею вс на плоскости ge, и представятъ, что плоскость авс обращается около ав, говорю, что въ семъ движеніи линея вс не сойдетъ съ плоскости ge.

Представимъ плоскость авс пришедшею въ какое нибудь положеніе авd; ежели бы линея вс, находящаяся тогда на вd, не находилась на плоскости ge, сего ради плоскость авd встрѣтилась бы съ плоскостію ge на прямой линеѣ вf; къ коей ав была бы перпендикулярна (178); слѣдовательно вf была бы также перпендикулярна къ ав; и какъ вd полагается перпендикулярна къ ав при тойже точкѣ в, по сему слѣдовало бы, что при тойже точкѣ в и на тойже плоскости авd можно бы было возставить два перпендикуляра къ ав, что не возможно (27); слѣдовательно вf не можетъ быть различная отъ вd; по чему и вс, въ движеніи своемъ около ав не можетъ сойти съ плоскости ge.

180. По сему, что бы прямая линея ав была (ф. 108) перпендикулярною къ плоскости ge, довлѣетъ, естьли она перпендикулярна къ двумъ линеямъ вс, вd, встрѣчающимся на сей плоскости при точкѣ ихъ сѣченія.

Ибо, естьли представимъ, что плоскость прямаго угла авс обращается около ав, линея вс назначитъ плоскость (179), къ коей ав будетъ перпендикулярна; и такъ, говорю, что сія плоскость

будетъ не другая, какъ плоскость GE двухъ линей BC и BD: ибо когда уголъ ABD прямой, какъ и уголъ ABC, линея BC, обращаясь около AB, необходимо будетъ имѣть линею BD за одно изъ своихъ положенiй; по сему BD есть на плоскости назначенной линеею BC; по сему и AB перпендикулярна къ плоскости CBD.

181. Ежели отъ точки A прямыя линеи AJ, наклонной къ плоскости GE (ф. 109) опустятъ перпендикулярную AB на сiю плоскость, и, соединивъ точки встрѣчи со плоскостiю B и J перпендикулярной и наклонной прямою BJ, проведутъ къ послѣдней BJ перпендикулярную CD на плоскости GE, говорю, что AJ будетъ также перпендикулярна къ CD.

Отъ точки J, возмемъ равныя части JC, JD, и проведемъ прямыя BC и BD; сiи двѣ послѣднiя линеи будутъ равны между собою (29); слѣдовательно два треугольника ABC, ABD будутъ равны: ибо, кромѣ того, что уголъ ABC равенъ углу ABD, поелику каждой изъ нихъ прямой, сторона AB есть общая и BC равна BD, по доказанному лишь теперь: по сему имѣютъ они равные углы, содержимые въ равныхъ сторонахъ едина по единой: слѣдовательно они и равны; по чему и AD равна AC; чего ради линея AJ имѣетъ двѣ точки A и J равноотстоящiя отъ точекъ C и D; по сему она и перпендикулярна къ CD (32).

182. Плоскость говорится перпендикулярна къ другой плоскости, когда она не наклоняется ни на ту ни на другую сторону сея послѣднiя.

183. По сему, чрезъ туже линею CD (ф. 110) взятую на какой либо плоскости GE, не можно провесть больше одной плоскости перпендикулярной къ сей плоскости GE.

184. Плоскость ск перпендикулярна къ другой плоскости ge, когда она проходитъ чрезъ прямую ab перпендикулярную къ сей другой. Ибо очевидно, что она не можетъ наклоняться ни на которую сторону сея плоскости ge.

185. Ежели чрезъ точку a, взятую на плоскости ск перпендикулярной къ плоскости ge, проведутъ ab перпендикулярную къ общему сѣченію cd, сія линея будетъ также перпендикулярна къ плоскости ge.

Ибо ежели она не перпендикулярна, изъ точки b, гдѣ она падаетъ, можно бы было возставить перпендикулярную къ плоскости ge, и провесть чрезъ сей перпендикуляръ и чрезъ общее сѣченіе cd плоскость, коя была бы перпендикулярна къ плоскости ge (184). Слѣдовательно, чрезъ туже линею cd, взятую на плоскости ge, можно провесть двѣ плоскости перпендикулярныя къ плоскости ge, что невозможно (183). По сему ab перпендикулярна къ плоскости ge.

186. Чего ради, когда плоскость ск перпендикулярна къ плоскости ge, перпендикуляръ ab, возставленный къ плоскости ge изъ точки b, общаго сѣченія сихъ плоскостей, будетъ необходимо на плоскости ск.

Изъ сего предложенія слѣдуетъ, что двѣ перпендикулярныя ba, lm къ той же плоскости ge, суть параллельны.

Ибо, естьли соединишь встрѣчи ихъ съ плоскостію, т. е. точки b и l линеею bl, и чрезъ сію линею и чрезъ ab проведешь плоскость ск, сія плоскость будетъ перпендикулярна къ плоскости ge (184); и понеже lm проведенная отъ точки l плоскости ск перпендикулярна къ плоскости ge, по сему будетъ она на плоскости ск (186); и такъ, поелику двѣ линеи ab, lm суть обѣ на тойже плоскости и перпендикулярны къ тойже линеи bl, суть онѣ параллельны (36 и 37).

187. По сему, ежели двѣ прямыя AB, CD (ф. 112) параллельны къ тойже третїей HF, будутъ онѣ также параллельны и между собою: ибо линеи AB, HF, будучи параллельны, могутъ быть обѣ перпендикулярны къ тойже плоскости GE; для тойже причины CD и HF могутъ быть перпендикулярны къ тойже плоскости GE: слѣдовательно AB и CD, будучи перпендикулярны къ тойже плоскости, будутъ параллельны.

188. Ежели двѣ плоскости CK, NL взаимно пересѣкающїяся (ф. 111) суть перпендикулярны къ третїей GE, общее ихъ сѣченїе AB будетъ также перпендикулярно къ плоскости GE.

Ибо перпендикуляръ, возставленный изъ точки B къ плоскости GE, долженъ находиться на каждой изъ сихъ двухъ плоскостей (186); по сему онъ не можетъ быть другой какъ общее сѣченїе сихъ плоскостей.

189. *Уголъ плоскостей* называютъ отверстїе двухъ плоскостей GF, GE (ф. 113), встрѣчающихся взаимно. Сей уголъ называютъ также наклоненїемъ одной плоскости къ другой.

Уголъ плоскостей, сдѣланный двумя плоскостями GF, GE есть не иное что, какъ количество, на которое плоскость GF должна бы была обратиться около AG, дабы притти въ настоящее ея положенїе, ежелибъ напередъ лежала на плоскости GE.

190. Отсюду удобно видѣть можно, что естьли чрезъ точку B, взятую на общемъ сѣченїи AG, проведешь на плоскости GE перпендикулярную BD къ GA, а на плоскости GF проведешь BC перпендикулярную къ тойже AG, уголъ составленный сими двумя плоскостями есть тоже, что уголъ сдѣланный двумя линеями BD и BC: ибо удобно видѣть можно, что во время обращенїя плоскости

GF, линея BC отходитъ отъ линеи BD, на коей она лежала при началѣ движенія; отходитъ, говорю, отъ BD, точно по томуже закону, по коему плоскость GF отходитъ отъ плоскости GE.

191. По сему, уголъ плоскостей имѣетъ туже мѣру, что и прямолинейный уголъ, содержимый въ двухъ прямыхъ, проведенныхъ на каждой изъ двухъ плоскостей его составляющихъ, перпендикулярно къ общему сѣченію и изъ тойже точки онаго.

Отсюду столь удобно вывесть слѣдующія предложенія, что довольно будетъ для насъ упомянуть только объ оныхъ.

192. Плоскость, падающая на другую плоскость, дѣлаетъ два угла, кои взятые вмѣстѣ, равны 180°.

193. Углы составленные какимъ нибудь числомъ плоскостей проходящихъ чрезъ туже прямую, стоящую на плоскости, равны 360°.

194. *Двѣ плоскости взаимно пересѣкающіяся*, дѣлаютъ противулежащіе при вершинѣ углы равные.

195. Параллельныя плоскости называются тѣ, кои, какъ бы далеко продолжены ни были, никогда не встрѣчаются.

196. Параллельныя убо плоскости сутъ въ равномъ вездѣ разстояніи одна отъ другой.

197. Ежели двѣ параллельныя плоскости пересѣчены третіею (ф. 114), общія ихъ сѣченія AB, CD, будутъ двѣ прямыя параллельныя: ибо, какъ онѣ находятся на тойже плоскости ABCD, не могли бы онѣ не встрѣтиться, естьлибъ не были параллельны; тогда очевидно и самыя плоскости такъ же бы встрѣтились.

198. Двѣ параллельныя плоскости, пересѣченныя третїею, имѣютъ тѣже свойства въ разсужденїи угловъ составляемыхъ ими съ сею третїею, кои и двѣ параллельныя прямыя, въ разсужденїи третїей прямой, коя ихъ пересѣкаетъ. Сїе есть послѣдствїе сказаннаго въ (191).

О свойствахъ прямыхъ линей сѣкомыхъ параллельными плоскостями.

199. Ежели отъ точки J, взятой внѣ плоскости GE, (ф. 115) будутъ проведены къ разнымъ точкамъ K, L, M, сея плоскости прямыя JK, JL, JM, и сїи прямыя будутъ пересѣчены плоскостїю ge, параллельною къ плоскости GE; говорю, 1 е, что сїи прямыя будутъ разсѣчены пропорцїонально; 2 е, что фигура klm будетъ подобна фигурѣ KLM.

Положимъ напередъ только три точки K, L, M. Понеже прямыя kl, lm, mk суть сѣченїя плоскостей JKL, JLM, JKM съ плоскостїю ge, онѣ суть параллельны прямымъ KL, LM, MK, сѣченїямъ тѣхъ же плоскостей съ плоскостїю GE (197); по сему треугольники JKL, JLM, JMK подобны треугольникамъ jkl, jlm, jmk, каждый каждому; слѣдовательно JK : jk :: KL : kl :: JL : jl :: LM : lm :: JM : jm :: MK : mk; и такъ, 1 е, ежели изъ сихъ равныхъ содержанїй возмешь только тѣ, кои заключаютъ въ себѣ прямыя, изходящїя изъ точки J. будетъ, какъ JK : jk :: JL : jl :: JM : jm; чего ради прямыя JK, JL, JM разсѣчены пропорцїонально.

2 е. Ежели изъ тѣхъ же перьвыхъ равныхъ содержанїй возмешь тѣ, кои заключаютъ въ себѣ линеи, содержимыя въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ, будетъ KL : kl :: LM : lm :: KM : km; по

сему два треугольника KLM, klm суть подобны, понеже их сторонЫ пропорцїональны.

Положим теперь какое угодно число точек A, B, C, D, F и проч. точно таким же образом докажем, что прямыя JA, JB, JC и проч. разсѣчены пропорцїонально; и ежели представишь дїагонали AC, AD и проч. ac, ad и проч. проведенныя от двух соотвѣтствующих углов A и a, можно доказать также и тѣм же образом, что треугольники ABC, ACD и проч. подобны треугольникам abc, acd и проч. каждый каждому; посему два многоугольника ABCDF, abcdf, составленные из тогоже числа подобных треугольников каждый каждому и подобно положенных, суть подобны (133).

200. Понеже двѣ фигуры KLM, klm подобны, заключим из сего, что угол KLM равен углу klm; и слѣдственно, ежели двѣ прямыя KL, LM, содержащїя угол KLM, параллельны двум прямым kl, lm, содержащим угол klm, угол KLM будет равен углу klm, хотя сїи два угла и не будут на тойже плоскости. Мы ужѐ сообщили сїе самое предложенїе (43); но там подлагали, что сїи два угла были на тойже плоскости.

201. Слѣдует еще из подобїя двух фигур ABCDF и abcdf, и из подобїя двух фигур KLM, klm, что площади двух сѣченїй abcdf, klm суть между собою, как площади двух фигур ABCDF, KLM.

Ибо ABCDF : abcdf :: $AB^2 : ab^2$ (161). Но в подобных треугольниках JAB, jab.

$$AB : ab :: JA : ja.$$

И слѣдственно (Арие. 191) :: $AB^2 : ab^2 :: JA^2 : ja^2$ или (199) :: $JM^2 : jm^2$, или (по причинѣ подобных треугольников JML, jml) :: $LM^2 : lm^2$; и по сему (161) :: KLM : klm; чего ради ABCDF : abcdf :: KLM : klm, или (Арие. 182) ABCDF : KLM :: abcdf : klm.

202. Сїе доказательство показываетъ въ тожъ время, что площади ABCDF, abcdf суть между собою, какъ квадраты двухъ прямыхъ JA и ja, проведенныхъ отъ точки J къ двумъ соотвѣтствующимъ точкамъ сихъ двухъ фигуръ, и слѣдовательно (199) какъ квадраты высотъ или перпендикуляровъ JP, jp, проведенныхъ отъ точки J къ плоскостямъ GE и ge.

Заключимъ же, 1. е, что ежели двѣ поверхности ABCDF, KLM равны, и двѣ поверхности abcdf, klm будутъ также равны.

2е. Что все лишь теперь нами сказанное будетъ и тогда справедливо, когда точка J и не будетъ общая прямымъ JA, JB, JC и проч; и прямымъ JM, JL, и проч. а каждая фигура имѣетъ точки особо, только чтобъ онѣ были въ тойже высотѣ надъ плоскостїю ge.

ОТДѢЛЪ ТРЕТЇЙ.

О тѣлахъ.

203. Назвали мы тѣломъ (1) все то, что имѣетъ три протяженїя: длину, ширину и толщину.

Теперь намѣрены показать о мѣрѣ и содержанїи тѣлъ.

Мы будемъ разсуждать о тѣлахъ ограниченныхъ плоскими поверхностями: изъ ограниченныхъ же кривыми поверхностями примемъ въ разсужденїе только цилиндръ, конусъ и шаръ.

Тѣла, ограниченныя плоскими поверхностями, различаются вообще числомъ и фигурою плоскостей ихъ заключающихъ: сїи плоскости должны быть числомъ не меньше четырехъ.

204. Тѣло, коего супротивныя плоскости равны и параллельны, и коего всѣ другїя плоскости

параллелограммы, называется вообще призмою. Смотри фигуры 116, 117, 118, 119.

И такъ можно смотрѣть на призьму, какъ на произведенную движенїемъ плоскости BDF, коя будетъ подвигаться по прямой линеи AB сама себѣ параллельно (ф. 116).

Двѣ параллельныя плоскости называются основанїями призьмы, а перпендикулярная LM, проведенная отъ точки одного изъ основанїй къ другому, называется высотою.

Изъ понятїя предложеннаго нами о призьмѣ, слѣдуетъ, что въ какомъ бы мѣстѣ призьму ни разсѣкли плоскостїю параллельною ея основанїю, оное сѣченїе будетъ всегда плоскость, совершенно равная основанїю.

Таковыя линеи какъ BA, кои суть встрѣчи двухъ смѣжныхъ параллелограммовъ, называются надстоящими прямыми призьмы.

Прямая призьма называется, когда сїи надстоящїя перпендикулярны къ основанїю; и тогда всѣ они равны высотѣ; смотри фигуры 117 и 119. Напротивъ того называютъ наклонною, когда надстоящїя наклоняются къ основанїю.

Призьмы различаются по числу сторонъ ихъ основанїй; естьли основанїе треугольникъ, называютъ призьмою треугольною (ф. 116); естьли четыреугольникъ, четыреугольною (ф. 117), и такъ далѣе.

Между четыреугольными призьмами особливо отличаютъ параллелепипедъ и кубъ.

Параллелепипедъ есть призьма четыреугольная, коего основанїя, слѣдственно и всѣ плоскости суть параллелограммы; и когда параллелограммъ, служащїй основанїемъ, есть прямоугольникъ и въ тожъ время призьма прямая, называется тогда параллелепипедомъ прямоугольнымъ. Смотри ф. 117.

Прямоугольный параллелепипедъ принимаетъ названіе куба, когда основаніе его квадратъ, и надстоящая его AB (ф. 119) равна сторонѣ онаго квадрата.

И по сему кубъ есть тѣло содержимое въ шести равныхъ квадратахъ. Симъ-то тѣломъ измѣряются всѣ другія тѣла, какъ вскорѣ мы о семъ и увидимъ.

205. Цилиндръ есть тѣло содержимое между двумя кругами равными и параллельными, и въ поверхности, кою назначитъ прямая AB, (ф. 120 и 121), двигаяся сама себѣ параллельно, по двумъ окружностямъ. Цилиндръ бываетъ прямой, когда линея CF (ф. 120), соединяющая центры двухъ сопротивныхъ основаній, перпендикулярна къ симъ кругамъ: сія линея CF называется ось цилиндра. Наклонный же цилиндръ есть тотъ, когда сія самая линея CF наклоняется къ основанію.

На прямой цилиндръ можно смотрѣть, какъ на произведенной движеніемъ прямоугольника FCDE, обращающагося около одной своей стороны CF.

206. Пирамида есть тѣло содержимое между многими плоскостями, изъ коихъ одна, называемая основаніемъ, есть какой либо многоугольникъ; другія же, треугольники, имѣющіе стороны сего многоугольника основаніями, и всѣ свои вершины соединенныя въ одной точкѣ, кою называютъ вершиною пирамиды. Смотри ф. 122, 123, 124.

Перпендикуляръ AM, проведенной отъ вершины на плоскоскость, служащую основаніемъ, называется высотою пирамиды.

Пирамиды различаются числомъ сторонъ ихъ основаній; такъ что у коей основаніе треугольникъ, называется треугольною пирамидою, а имѣющая основаніе четыреугольникъ, четыреугольною, и такъ далѣе.

Правильною пирамидою называютъ, когда многоугольникъ, служащій ей основаніемъ, есть правильный, и естьли въ тоже время перпендикуляръ AM (ф. 124), проведенный отъ вершины, проходитъ чрезъ центръ сего многоугольника.

Перпендикуляръ AG, проведенный отъ вершины A, на DE одну изъ сторонъ основанія, называется апотемою или высотою бока.

Явствуетъ, что всѣ треугольники, кои смыкаются въ точкѣ A, суть равные и равнобедренные: ибо всѣ ихъ основанія равны и надстоящія AB, AC, AD и проч. такожде равны, понеже всѣ сіи наклонныя равно отстоятъ отъ перпендикуляра AM (29).

Не меньше очевидно, что всѣ высоты боковъ суть равны.

207. Конусъ (ф. 125 и 126) есть тѣло, содержимое въ круглой плоскости BGDH, называемой основаніемъ конуса, и въ поверхности, кою назначитъ линея AB, утвержденная въ точкѣ A обращаясь около окружности круга BDGH.

Точка A называется вершиною конуса.

Перпендикуляръ, проведенный отъ вершины на плоскость основанія, называется высотою конуса; и конусъ бываетъ прямой, когда сей перпендикуляръ проходитъ чрезъ центръ круга основанія (ф. 125); наклонной же, когда не проходитъ (ф. 126).

Можно представить прямой конусъ, какъ произведенной обращеніемъ прямоугольнаго треугольника ACD (ф. 125) около своей стороны AC.

208. Шаръ есть тѣло опредѣленное со всѣхъ сторонъ такою поверхностію, коея всѣ точки равно отстоятъ отъ одной и тойже точки.

Можно смотрѣть на шаръ, какъ на тѣло, произшедшее отъ обращенія полукруга ABD (ф. 128) около своего діаметра AD.

Явствуетъ, что всякое сѣченіе шара плоскостію есть кругъ. Ежели сія плоскость проходитъ чрезъ центръ его, оное сѣченіе называется великимъ кругомъ шара. Всякій другій кругъ, коего плоскость не проходитъ чрезъ центръ шара, называется малымъ кругомъ.

Секторъ шара есть тѣло, произшедшее отъ обращенія сектора круга BCA около радіуса AC. Поверхность, кою опишетъ дуга AB въ семъ обращеніи, называется выпуклостію сектора шара.

Сегментъ шара есть тѣло, производимое обращеніемъ полусегмента круга AFB около части радіуса AF.

О тѣлахъ подобныхъ.

209. Подобныя тѣла суть тѣ, кои составлены изъ того же числа подобныхъ плоскостей каждыя каждой и подобно положенныхъ въ сихъ двухъ тѣлахъ.

210. Надстоящія линеи сходственныя и вершины толстыхъ угловъ сходственныхъ, суть по сему линеи и точки подобно положенныя въ двухъ тѣлахъ: ибо сходственныя надстоящія линеи и вершины толстыхъ угловъ сходственныхъ, суть линеи и точки подобно положенныя въ отношении къ плоскостямъ, коимъ онѣ принадлежатъ, поелику сіи плоскости полагаются подобными; и какъ сіи плоскости суть подобно положенныя въ двухъ тѣлахъ; слѣдовательно, и проч.

211. По сему треугольники, соединяющіе толстый уголъ и концы сходственной надстоящей линеи въ каждомъ тѣлѣ, суть двѣ фигуры подобныя и подобно положенныя въ двухъ тѣлахъ: ибо концы сходственныхъ над-

стоящихъ суть сами вершины сходственныхъ толстыхъ угловъ, кои подобно положены въ рузсужденіи тѣлъ (210).

212. Діагонали, соединяющіе два сходственные толстые угла, суть по сему между собою, какъ сходственныя надстоящія сихъ тѣлъ: ибо онѣ суть стороны подобныхъ треугольниковъ, о коихъ лишь говорили, и кои имѣютъ одною изъ ихъ сторонъ, сходственныя надстоящія.

По сему два подобныя тѣла могутъ быть раздѣлены плоскостями проведенными чрезъ два сходственные угла и чрезъ двѣ сходственныя надстоящія на тоже число пирамидъ, подобныхъ каждая каждой; ибо плоскости сихъ пирамидъ будутъ составлены изъ треугольниковъ подобныхъ и подобно положенныхъ въ сихъ двухъ тѣлахъ (211); и основанія сихъ самыхъ пирамидъ будутъ также подобны, по тому что онѣ подобныя плоскости двухъ тѣлъ; по сему (209) сіи пирамиды будутъ подобны.

213. Ежели изъ двухъ сходственныхъ угловъ будутъ опущены перпендикуляры на двѣ сходственныя плоскости, сіи перпендикуляры будутъ между собою въ содержаніи двухъ какихъ либо сходственныхъ надстоящихъ.

Ибо два сходственные угла, будучи подобно положены въ разсужденіи двухъ сходственныхъ плоскостей (210), должны необходимо быть въ такихъ разстояніяхъ отъ сихъ плоскостей, кои бы были между собою въ содержаніи сходственныхъ измѣреній двухъ тѣлъ.

О мѣрѣ поверхностей тѣлъ.

214. Когда поверхности призьмъ и пирамидъ состоятъ изъ параллелограммовъ, треугольниковъ и многоугольниковъ прямолинейныхъ, мы

бы могли здѣсь и не говорить о способѣ, какъ должно ихъ измѣрять, понеже въ (145, 147, 149) мы уже показали средство измѣрять части, изъ коихъ онѣ состоятъ. Но изъ сказаннаго нами о семъ предметѣ можно будетъ вывесть нѣкоторыя послѣдствія, кои не токмо послужатъ къ облегченію дѣйствій, потребныхъ для сихъ измѣреній, но будутъ еще намъ полезны для сысканія поверхностей цилиндровъ, конусовъ и самаго шара.

215. Поверхность какой либо призьмы, безъ двухъ основаній, равна произведенію одной изъ надстоящихъ сея призмы на обмѣръ сѣченія bdfhk (ф. 118), сдѣланнаго плоскостію, къ коей сія надстоящая будетъ перпендикулярна.

Ибо, когда надстоящая AB полагается перпендикулярною къ плоскости bdfhk, прочія надстоящія будучи ей параллельны, будутъ также перпендикулярны къ плоскости bdfhk; почему и взаимно прямыя bd, df, fh, hk и проч. будутъ перпендикулярны каждая къ той надстоящей, кою она пересѣкаетъ; когдаже примемъ сіи надстоящія за основанія параллелограммовъ, кои окружаютъ призму, линеи bd, df, fh будутъ ихъ высоты. Чего ради должно будетъ для сысканія поверхности призьмы умножить только надстоящую AB перпендикуляромъ bd; надстоящую CD, перпендикуляромъ df, и такъ далѣе; потомъ сложить всѣ сіи произведенія: но какъ всѣ надстоящія равны, очевидно, что сіе будетъ тоже, когда умножишь одну AB на сумму всѣхъ высотъ, т. е. на обмѣръ bdfhk.

216. Когда призма прямая, сѣченіе bdfhk не различествуетъ отъ основанія BDFHK, и надстоящая AB есть тогда высота призмы; по сему поверхность прямой призмы (безъ

двухъ основанїй) равна произведенїю обмѣра основанїя, умноженнаго высотою.

217. Выше мы видѣли (136), что кругъ можно взять за правильной многоугольникъ о безчисленныхъ сторонахъ; почему и цилиндръ можно взять за призьму, коея число параллелограммовъ, составляющихъ поверьхность, будетъ безконечное. Слѣдовательно,

Поверьхность прямаго цилиндра равна произведенїю высоты сего цилиндра на окружность основанїя.

Видѣли мы въ (152), какимъ образомъ должно искать сїю окружность.

Чтожъ касается до наклоннаго цилиндра, должно умножить длину его ав на окружность сѣченїя bdgh (ф. 121), сїе сѣченїе должно быть сдѣлано такъ, какъ сказано было (215). Способъ для опредѣленїя долготы сего сѣченїя зависитъ отъ бо́льшихъ познанїй, нежели мы по сихъ поръ сообщили; въ практикѣ должно довольствоваться механическимъ измѣренїемъ, обводя цилиндръ ниткою (или чѣмъ либо подобнымъ сему), кою должно прикрѣпить къ плоскости, къ которой бы долгота ав сего цилиндра была перпендикулярна.

218. Для пирамиды, естьли она неправильная, должно раздѣльно искать площадь каждаго изъ треугольниковъ ее обьемлющихъ, и потомъ сложить сїи площади.

Но ежели она правильная, можно поверьхность ея сыскать короче, чрезъ умноженїе обмѣра ея основанїя на половину высоты ея бока (ф. 124): ибо когда всѣ треугольники тойже высоты, довлѣетъ помножить половину общей высоты на сумму всѣхъ основанїй.

219. Принимая еще окружность круга за правильной многоугольникъ о безчисленныхъ сторонахъ, можемъ конусъ взять за правильную

пирамиду, коея поверхность (безъ основанія) составлена изъ безчисленнаго множества треугольниковъ, и по сему, выпуклая поверхность прямаго конуса равна произведенію окружности основанія на половину стороны AB сего конуса (ф. 125).

Что касается до поверхности наклоннаго конуса, сысканіе ея зависитъ отъ вышшей Геометріи. Чего для и говорить здѣсь объ оной не будемъ. Въ прочемъ образъ нашего разсужденія о конусѣ доставляетъ средство измѣрять его близко къ точности, когда онъ и наклонный. Должно раздѣлить окружность основанія на довольно великое число дугъ такъ, чтобъ на каждую изъ нихъ можно было смотрѣть, безъ ощутительной погрѣшности, какъ на прямую линею; и тогда вычислить поверхность его, какъ пирамиды, имѣющей столько треугольниковъ, сколько дугъ.

220. *Дабы сыскать поверхность отрѣзаннаго прямаго конуса, коего сопротивныя основанія BGDH, bgdh (ф. 127) параллельны, должно умножить сторону Bb сего отрѣзаннаго конуса половиною суммы окружностей двухъ сопротивныхъ основаній.*

Самымъ дѣломъ, можно представить сію поверхность, какъ составленную изъ безчисленнаго множества такихъ трапезій, какъ EFfe, коея стороны Ee, Ff простираются къ вершинѣ A; а какъ площадь каждой изъ сихъ трапезій равна половинѣ суммы двухъ сопротивныхъ основаній EF, ef, умноженной разстояніемъ сихъ двухъ основаній (148); но сіе разстояніе не различествуетъ отъ сторонъ Ee, Ff или Bb; по сему, дабы имѣть сумму всѣхъ сихъ трапезій, должно умножить полсуммы всѣхъ сопротивныхъ основаній, каковы суть EF, ef, то есть полсуммы

двухЪ окружностей, линеею вb, коя есть общая высота всѣхЪ сихЪ трапезій.

221. Ежели чрезЪ средину м стороны вb, проведемЪ плоскость, параллельную кЪ основанїю, сѣченїе (199) будетЪ кругЪ, коего окружность будетЪ половина суммы окружностей двухЪ супротивныхЪ основаній, понеже дїаметрЪ мn (148) есть половина суммы дїаметровЪ оснований; а сїи окружности (136) суть между собою, какЪ ихЪ дїаметры. Слѣдовательно поверхность отрѣзаннаго конуса, у коего основанїя параллельны, равна произведенїю стороны сего отрѣзаннаго конуса на окружность сѣченїя сдѣланнаго вЪ равномЪ разстоянїи отЪ двухЪ супротивныхЪ основаній. Сїе предложенїе послужитЪ намЪ для доказанїя слѣдующаго:

222. Поверхность шара равна произведенїю окружности одного изЪ великихЪ круговЪ, умноженной дїаметромЪ.

Представь полуокружность AKD (ф. 129), раздѣленною на безчисленное множество дугЪ; каждая изЪ дугЪ, какЪ KL, будучи самомалѣйшая, не будетЪ различна отЪ своей хорды.

ПроведемЪ отЪ концовЪ дуги KL перпендикуляры KE, LF кЪ дїаметру AD; и чрезЪ средину J дуги KL или ея хорды проведемЪ JH, параллельную кЪ KE, и радїусЪ JC; сей радїусЪ будетЪ перпендикулярenЪ кЪ KL (52); проведемЪ на конецЪ KM перпендикулярную кЪ JH или кЪ LF. Естьли представимЪ, что полуокружность AKD оборотится около AD, она произведетЪ поверхность шара, и каждая изЪ ея дугЪ, какЪ KL, произведетЪ поверхность отрѣзаннаго конуса, коя будетЪ одна изЪ поясовЪ поверхности шара. Мы покажемЪ, что оная поверхность сего отрѣзаннаго конуса равна произведенїю линеи KM или EF умноженной окружностїю, коея радїусЪ есть JC или AC.

Треугольникъ KML подобенъ треугольнику JHC, понеже сїи два треугольника имѣютъ стороны перпендикулярныя одна къ другой по предписанному. Почему сїи подобные треугольники дадутъ (111) сїю пропорцїю: KL : KM :: JC : JH, или (поелику (136) окружности круговъ суть между собою какъ ихъ радїусы) KL : KM :: окр. JC : окр. JH; * слѣдовательно, когда (Ариѳ. 178) во всякой пропорцїи произведенїе крайнихъ равно произведенїю среднихъ, KL × окр. JH равно KM × окр. JC, или (что все тоже) равно EF × окр. AC. И такъ (221) первое изъ сихъ произведенїй означаетъ поверхность отрѣзаннаго конуса, произведеннаго линеею KL; по сему сей отрѣзанной конусъ равенъ EF × окр. AC, т. е. произведенїю его высоты EF на окружность великаго круга шара. И поелику взявъ всякую другую дугу, какъ KL, докажемъ тоже и тѣмъ же образомъ, должно заключить, что сумма малыхъ отрѣзанныхъ конусовъ, составляющихъ поверхность шара, равна окружности одного великаго круга, умноженной суммою высотъ сихъ отрѣзанныхъ конусовъ, коя сумма явно составляетъ дїаметръ шара. Слѣдовательно поверхность шара равна окружности одного великаго круга умноженной дїаметромъ.

223. Ежели представимъ цилиндръ (ф. 130), заключающїй въ себѣ шаръ, и прикасающїйся къ оному, которой бы имѣлъ высотою дїаметръ сего шара; т. е. ежели представимъ цилиндръ, описанный около шара, то можемъ заключить, что поверхность шара равна выпуклой поверхности цилиндра описаннаго; ибо (217) поверхность сего цилиндра равна произведенїю окру-

---

* Чрезъ сїе выраженїе окр. IC, окр. IH мы разумѣемъ окружность, коея радїусъ есть IC, и окружность, коея радїусъ есть IH.

жности основанія, умноженной высотою; и такЪ окружность основанія есть окружность великаго круга шара, а высота равна діаметру; чего ради и проч.

224. Понеже для сысканія площади круга (151), должно умножить его окружность на половину радіуса или на четверть діаметра, а для сысканія поверхности шара, должно умножить окружность діаметромЪ, можемЪ по сему сказать, что поверхность шара есть четырекратна площади великаго круга.

225. Доказательство, данное нами на измѢреніе поверхности шара, также утверждаетЪ, что для сысканія выпуклой поверхности сегмента или отсѢка шара, произведеннаго дугою AL (ф. 131), обращающеюся около діаметра AD, должно умножить окружность великаго круга шара на высоту AJ сего отсѢка; и что, для сысканія поверхности пояса шара, содержимой между двумя параллельными плоскостями таковыми, какЪ LKM, NRP, должно такимЪ же образомЪ умножить окружность великаго круга шара, на высоту JO сего пояса шара. Ибо можно разсуждать о ихЪ поверхностяхЪ какЪ и о цѢлой поверхности шара, т. е. какЪ составленныхЪ изЪ безчисленнаго множества отрѢзанныхЪ конусовЪ, изЪ коихЪ каждой равенЪ произведенію окружности великаго круга шара на его высоту.

О содержаніяхЪ поверьхностей тѢлЪ.

226. Ежели два тѢла, коихЪ потребно сравнить поверхности, ограничены неподобными и неправильными плоскостями, не иначе поступить можемЪ, для сысканія содержанія ихЪ поверхностей, какЪ вычислить каждую поверхность

отдѣльно въ мѣрахъ однородныхъ, и сравнить число мѣръ одной съ числомъ мѣръ другой, т. е. на прим. число квадратныхъ футъ одной съ числомъ квадратныхъ футъ другой.

227. Поверхности призмъ, (безъ основанiй) суть между собою, какъ произведенiя долготы сихъ призмъ на обмѣръ сѣченiя, сдѣланнаго перпендикулярно къ сей долготѣ.

Ибо сiи поверхности равны симъ произведенiямъ (215).

228. По сему, ежели долготы суть равны, поверхности призмъ будутъ между собою, какъ обмѣры сѣченiя, сдѣланнаго перпендикулярно къ долготѣ каждаго. Ибо содержанiе произведенiй долготы на обмѣръ сего сѣченiя не перемѣнится, естьли и оставимъ въ каждомъ изъ сихъ произведенiй долготу, коя есть общiй сомножитель.

229. По сему поверхности прямыхъ призмъ или прямыхъ цилиндровъ тойже высоты, суть между собою, какъ обмѣры основанiй, какой бы фигуры сверьхъ сего сiи основанiя ни были.

И ежели на противъ того, обмѣры основанiй суть тѣже, а высоты разныя, сiи поверхности будутъ, какъ ихъ высоты.

230. Поверхности прямыхъ конусовъ суть между собою, какъ произведенiя сторонъ сихъ конусовъ на окружности основанiй или на радiусы или дiаметры сихъ основанiй.

Ибо каждая изъ сихъ поверхностей, будучи равна произведенiю окружности основанiя на половину стороны конуса (219), должна быть къ другой въ томъ же содержанiи съ симы произведенiями, и слѣдственно какъ дважды сiи произведенiя. Сверьхъ сего, поелику окружности содержатся между собою, какъ ихъ радiусы или ихъ

діаметры, можемъ вставить въ сіи произведенія (99) содержаніе радіусовъ или діаметровъ вмѣсто окружностей.

231. Поверхности подобныхъ тѣлъ суть между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ линей.

Ибо онѣ составлены изъ подобныхъ плоскостей, коихъ площади суть между собою, какъ квадраты ихъ сторонъ или сходственныхъ линей, кои линеи суть сходственныя линеи и тѣлъ, и пропорціональны онѣ всѣмъ другимъ сходственнымъ линеямъ.

232. Поверхности двухъ шаровъ суть между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ. Ибо когда поверхность одного шара четырекратна площади своего великаго круга; то поверхности двухъ шаровъ должны быть между собою какъ четырежды ихъ великіе круги, или просто какъ ихъ великіе круги; т. е. (162) какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

О толстотѣ призьмы.

233. Дабы утвердить понятія о томъ, что надобно разумѣть подъ толстотою тѣла, должно себѣ представить мысленно часть протяженія въ таковомъ видѣ, въ какомъ угодно, на примѣръ въ видѣ куба, но имѣющаго чрезмѣрно мало длины, ширины и толщины и вообразить, что вмѣстительность тѣла со всемъ наполнена таковыми же кубами, кои назовемъ толстыми точками, сумма сихъ точекъ составляетъ то, что мы разумѣемъ чрезъ толстоту тѣла.

234. Двѣ призьмы или два цилиндра, или одна призьма и одинъ цилиндръ тогоже основанія и той же высоты или равныхъ основаній и равныхъ высотъ суть равны толстотою, какихъ бы различныхъ фигуръ при томъ ихъ основанія ни были.

Ибо, ежели представимъ сіи тѣла разсѣченными плоскостями параллельными ихъ основаніямъ на самотончайшіе слои, толщиною равною толстымъ точкамъ, коими, можно вообразить, сіи тѣла наполнены, очевидно, что, въ каждомъ тѣлѣ, когда каждое сѣченіе равно основанію (204), число толстыхъ точекъ, изъ коихъ каждой слой будетъ составленъ, будетъ вездѣ тоже, и равное числу точекъ на поверхности основанія: и какъ полагаемъ тужъ высоту у сихъ двухъ тѣлъ, каждое изъ нихъ будетъ имѣть тоже число слоевъ; и по сему онѣ будутъ содержать въ суммѣ тоже число толстыхъ точекъ: чего ради равны онѣ и толстотою.

О измѣреніи толстоты призьмъ и цилиндровъ.

235. Разсужденіе о толстыхъ точкахъ, кои мы лишь ввели во употребленіе, особенно полезно тогда, когда для доказанія равенства двухъ тѣлъ, должны будемъ разсуждать о сихъ тѣлахъ въ самыхъ ихъ стихіяхъ, раздробляя ихъ на слои самотончайшія; мы будемъ имѣть и еще случай разсуждать о нихъ такимъ же образомъ. Но когда желаютъ измѣрять вмѣстительность или толстоту тѣлъ для обыкновенныхъ употребленій, доходятъ до сего не изысканіемъ выкладокъ числа ихъ толстыхъ точекъ; ибо ясно видѣть можно, что во всякомъ тѣлѣ таковыхъ точекъ находится безчисленное множество.

Что же мы дѣлаемъ самою вещію, когда измѣряемъ толстоту тѣлъ? Ищемъ опредѣлить сколько разъ сіе тѣло содержитъ въ себѣ другое извѣстное. На прим. когда желаемъ измѣрить параллелепипедъ прямоугольный ABCDEFGH (ф. 132)

тогда имѣемъ за предмѣтъ узнать, сколько сей параллелепипедъ содержитъ въ себѣ такихъ кубовъ, какъ извѣстной кубъ x; и обыкновенно толстоты тѣлъ измѣряемы бываютъ кубическою мѣрою.

Для сысканія толстоты прямоугольнаго параллелепипеда ABCDEFGH, должно искать сколько его основаніе EFGH содержитъ въ себѣ таковыхъ квадратныхъ частей какъ efgh; равнымъ образомъ искать сколько разъ высота AH содержитъ въ себѣ высоту ah; и когда умножимъ число квадратныхъ частей основанія EFGH на число частей прямыя AH, произведеніе покажетъ, сколько предложенный параллелепипедъ содержитъ въ себѣ такихъ кубовъ, какъ x; то есть, сколько онъ содержитъ въ себѣ кубическихъ футъ, или кубическихъ дюймовъ и проч. естьли сторона ah куба x есть футъ или дюймъ.

Самымъ дѣломъ видимъ, что на поверхности EFGH *можно помѣстить столько такихъ кубовъ*, какъ x, сколько квадратовъ efgh въ основаніи EFGH. Всѣ сіи кубы составятъ параллелепипедъ, коего высота HL будетъ равна ah; и такъ явствуетъ, что можно будетъ помѣстить въ тѣлѣ ABCDEFGH столько параллелепипедовъ таковыхъ, какъ сей, сколько разъ высота HL будетъ содержаться въ AH; и по сему должно взять сей параллелепипедъ, или число кубовъ помѣщенныхъ на EFGH столько разъ, сколько частей въ AH; или поелику число сихъ кубовъ есть тоже, что и число квадратовъ, содержимыхъ въ основаніи, должно умножить сіе число квадратовъ содержимыхъ въ основаніи, на число частей высоты, и произведеніе покажетъ число кубовъ содержимыхъ въ предложенномъ параллелепипедѣ.

236. Понеже доказано (234), что призьмы равныхъ основаній и высотъ, равны и толсто-

тою, слѣдуетъ изъ сего предложенія, и изъ того, что мы лишь теперь сказали, что для сысканія числа кубическихъ мѣръ, кое заключало бы въ себѣ какая либо призьма ACEGJKBDFH (ф. 118), должно измѣрить ея основаніе KBDFH квадратными мѣрами, а высоту ея LM частями равными сторонѣ куба взятаго за мѣру, и умножать число квадратныхъ мѣръ, кое сыщутъ въ основаніи, на число линейныхъ мѣръ высоты, что обыкновенно выражаютъ, говоря, толстота какой либо призьмы равна произведенію площади основанія на высоту сея призьмы.

Но и здѣсь мы должны примѣчать тоже, что мы дали замѣтить (145) при площадяхъ: какъ не можно сказать во всей строгости, что умножаемъ линею на линею, такъ нельзя сказать и того, что умножаемъ поверхность линеею. Сіе значитъ, какъ мы лишь видѣли, что тѣло (коего число кубовъ есть тоже, что и число квадратовъ основанія) должно столько разъ взять, сколько его высота содержится въ высотѣ цѣлаго тѣла; т. е. столько разъ, сколько оно находится въ измѣряемомъ тѣлѣ.

237. Заключимъ изъ предъидущаго, что, дабы найти толстоту прямаго цилиндра или наклоннаго, должно такъ же умножить площадь основанія на высоту сего цилиндра, понеже цилиндръ равенъ призьмѣ того же съ нимъ основанія и высоты (234).

О толстотѣ пирамидъ.

238. Припомнимъ, что было сказано (201); и приложивъ оное къ пирамидамъ, можемъ заключить изъ того, что ежели двѣ пирамиды JABCDF, JKLM (ф. 115) тойже высоты будутъ разсѣчены тоюже плоскостію ge, параллельною

плоскости ихъ основанія (*), сѢченія abcdf, klm будутъ между собою въ содержаніи ихъ основаній ABCDF, KLM, чего ради будутъ и равны, когда сіи основанія равны. Естьли представимъ опять сіи пирамиды разсѢченными плоскостію параллельною плоскости ge, и очень къ ней близко, очевидно, что сіи два толстые слоя, содержимые между сими двумя плоскостями очень близкими одна къ другой, должны быть также между собою въ содержаніи основаній: ибо число толстыхъ точекъ потребныхъ для наполненія сихъ двухъ слоевъ равной толщины зависитъ единственно отъ величины соотвѢтствующихъ сѢченій. Съ симъ подлогомъ, поелику двѢ пирамиды суть той же высоты, не можемъ представить чтобъ находилось больше слоевъ въ одной пирамидѢ нежели въ другой. И такъ поелику соотвѢтствующіе слои, всегда въ содержаніи основаній; сумма сихъ слоевъ и слѢдственно толстоты пирамидъ будутъ между собою, какъ ихъ основанія. Чего ради толстоты двухъ пирамидъ тойже высоты суть между собою, какъ основанія сихъ пирамидъ, и слѢдовательно пирамиды равныхъ основаній и равныхъ высотъ, равны толстотою, какихъ бы различныхъ фигуръ сверхъ сего основанія ихъ ни были.

МѢра толстоты пирамидъ.

239. Понеже измѢрять тѢло есть не иное что, какъ сыскать сколько разъ содержитъ оно въ себѢ другое извѢстное тѢло, или, вообще, сыскать, какое содержаніе имѢетъ оно къ другому извѢстному тѢлу; по сему, дабы быть въ состояніи измѢрять пирамиды, не остается намъ дру-

* Для бо́льшей простоты мы полагаемъ, что вершины сихъ пирамидъ находятся въ одной точкѢ и основанія помѢщены на тойже плоскости GE.

гаго, какЪ сыскать вЪ какомЪ содержанiи онЪ кЪ призьмамЪ, что мы и намѣрены основать вЪ слѣдующемЪ предложенiи.

240. *Всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей сЪ нею тоже основанiе и туже высоту.*

Для утвержденiя сего предложенiя довольно будетЪ показать, что треугольная пирамида есть треть треугольной призьмы, имѣющей тоже сЪ нею основанiе и туже высоту; ибо всегда можно представить призьму, какЪ составленную изЪ столь многихЪ треугольныхЪ призьмЪ, и пирамиду, какЪ составленную изЪ столь многихЪ треугольныхЪ пирамидЪ, сколько можно представить треугольниковЪ во многоугольникѣ, служащемЪ основанiемЪ одной и другой: смотри ф. 118.

КакимЪ же образомЪ можно убѣдить себя вЪ истиннѣ предложенiя о треугольной пирамидѣ: оный есть слѣдующiй. Пусть ABCDEF (ф. 133) будетЪ треугольная призьма: *вообрази, что на* плоскостяхЪ AE, CE сея призьмы проведены двѣ дiагонали BD, BF, и что чрезЪ сiи дiагонали проведена плоскость BDF; сiя плоскость отрѣжетЪ отЪ призьмы пирамиду тогоже основанiя и тойже высоты сЪ сею призьмою, понеже она имѣетЪ вершину свою вЪ B на верхнемЪ основанiи, а основанiе ея на нижнемЪ основанiи призьмы DEF: сiю отдѣленную пирамиду можно видѣть вЪ фигурѣ 134; а фигура 135 представляетЪ, что осталось отЪ призьмы.

Сей остатокЪ можно представить себѣ, какЪ обращенный или лежащiй на плоскости ADFC; и тогда будетЪ видно, что сiя пирамида есть четыреугольная, имѣющая основанiемЪ параллелограммЪ ADFC, а вершиною точку B; по чему, естьли представимЪ, что на основанiи ADFC проведена дiагональ CD, можно себѣ представить,

что цѣлая пирамида ADFCB составлена изъ двухъ треугольныхъ пирамидъ ADCB, CFDB, кои будутъ имѣть основанiями два равные треугольника ACD, CDF, а вершиною общую точку B, и кои слѣдственно будутъ равны (238). И такъ изъ сихъ двухъ пирамидъ, одна, а именно пирамида ADCB, можетъ быть представлена, какъ имѣющею основанiемъ треугольникъ ABC, т. е верхнее основанiе призьмы, а вершиною точку D, принадлежавшую къ нижнему основанiю; по сему сiя пирамида равна пирамидѣ DEFB (ф. 134), понеже она имѣетъ тоже основанiе и туже высоту, что пирамида DEFB; чего ради три пирамиды DEFB, ADCB, CFDB равны между собою; и понеже, будучи соединены составляютъ призьму, изъ сего должно заключить, что каждая есть треть призьмы; по чему пирамида DEFB есть третiя часть призьмы ABCDEF имѣющей съ нею тоже основанiе и туже высоту.

241. *Понеже на конусъ можно смотрѣть, какъ на пирамиду, коея обмѣръ основанiя будетъ имѣть безчисленное множество сторонъ; а на цилиндръ, какъ на призьму, коея обмѣръ основанiя будетъ имѣть также безчисленное множество сторонъ, должно изъ сего заключить, что прямой конусъ, или наклонной, есть треть цилиндра тогоже основанiя и тойже высоты.*

242. По сему, дабы сыскать толстоту пирамиды или какого либо конуса, должно умножить площадь основанiя на треть высоты.

243. Что касается до сысканiя толстоты отрѣзанной пирамиды или конуса, когда два супротивныя основанiя параллельны, должно найти высоту отрѣзка, и тогда легко уже сыскать толстоту цѣлой пирамиды и ея отрѣзка, слѣд-

ственно и самой отрѣзанной пирамиды. На примѣрѣ въ фигурѣ 115, естьли желаю сыскать толстоту отрѣзанной пирамиды KLMklm, вижу (242), что должно умножить площадь KLM на третью часть высоты JP; равнымъ образомъ умножить площадь klm на третью часть высоты jp, и сїе послѣднее произведенїе вычесть изъ перьваго; но какъ неизвѣстны ни высота цѣлой пирамиды, ни отрѣзка; то одну и другую опредѣлятъ слѣдующимъ образомъ. Видѣли мы выше (199), что линеи JL, JM, JP и пр. разсѣчены пропорцїонально плоскостїю ge, и что онѣ къ частямъ ихъ jl, lm, jp содержатся какъ LM: lm, по сему будетъ

LM : lm :: JP : jp;

чего ради (Ариѳ. 184) LM−lm : LM :: JP−jp : JP; то есть, LM−lm : LM :: PP : JP.

И такъ, когда знаютъ отрѣзанную пирамиду, легко могутъ измѣрить стороны LM, lm и высоту Pp; слѣдовательно по сей пропорцїи могутъ сыскать четвертый членъ JP (Ариѳ. 179) или высоту цѣлой пирамиды; и отнявъ отъ нее высоту отрѣзанной пирамиды будутъ имѣть высоту отрѣзка.

О толстотѣ шара, его секторовъ и сегментовъ или отсѣковъ.

244. Дабы сыскать толстоту шара, должно умножить поверхность его на треть радїуса.

Ибо можно смотрѣть на поверхность шара, какъ на составъ безчисленнаго множества плоскостей безпредѣльно малыхъ, изъ коихъ каждая служитъ основанїемъ маленькой пирамидѣ, имѣющей вершину свою въ центрѣ шара, и коея слѣдственно высота есть радїусъ. И какъ каждая изъ

сихъ маленькихъ пирамидъ равна (242) произведенію своего основанія на треть высоты, т. е. на треть радіуса, всѣ онѣ вмѣстѣ будутъ равны произведенію суммы всѣхъ ихъ основаній на треть радіуса, т. е. равны произведенію поверхности шара на треть радіуса.

245. Поелику поверхность шара есть (224) въ четверо больше площади одного изъ своихъ великихъ круговъ, по сему можно, для сысканія толстоты шара, умножить треть радіуса на четырежды площадь одного изъ великихъ круговъ, или четырежды треть радіуса на площадь одного изъ великихъ круговъ, или на конецъ $\frac{2}{3}$ діаметра на площадь одного изъ великихъ круговъ.

246. Для сысканія толстоты цилиндра, мы видѣли, что должно было умножить площадь основанія на высоту. По сему естьли потребна будетъ толстота цилиндра, описаннаго около шара (ф. 130), можно сказать, что его толстота равна произведенію одного изъ великихъ круговъ шара на діаметръ; а какъ толстота шара равна произведенію одного изъ великихъ круговъ на $\frac{2}{3}$ діаметра; слѣдовательно, толстота шара есть $\frac{2}{3}$ толстоты цилиндра описаннаго.

247. На выпуклость сектора шара AGBHEA, служащую основаніемъ сектору CBGEHA (ф. 128), можемъ такъ же смотрѣть, какъ на составъ безчисленнаго множества плоскостей, безпредѣльно малыхъ, по чему и на самой секторъ шара можно взирать, какъ на составъ безчисленнаго множества пирамидъ, кои всѣ имѣютъ высотою радіусъ, и коихъ сумма основаній составляетъ поверхность сектора. По сему секторъ шара равенъ произведенію поверхности выпуклости сектора шара на $\frac{1}{3}$ радіуса. Мы видѣли (225), какъ находится поверхность оныя выпуклости.

248. Что касается до сегмента или отсѣка, какъ онъ есть, не иное что, какъ самый секторъ CBGEHA безъ конуса CBGEH; то, поелику показанъ уже (247) и (242) способъ находить толстоту сихъ двухъ тѣлъ, ничего намъ не остается говорить объ ономъ.

О измѣреніи другихъ тѣлъ.

249. Что касается до другихъ тѣлъ, ограниченныхъ плоскими поверхностями, средство естественно представляющееся для ихъ измѣренія есть сіе: должно вообразить ихъ, составленными изъ пирамидъ, кои основаніями своими имѣютъ сіи плоскія поверхности, а общею вершиною одинъ изъ угловъ предлагаемаго тѣла; но какъ сіе средство бываетъ не только рѣдко выгодно, но сверхъ сего не столь скороспѣшно и свойственно для практики, мы предложимъ здѣсь слѣдующее тѣмъ съ большею охотою, что оно съ пользою можетъ употреблено быть для измѣренія толстоты трюма корабля. Что мы и покажемъ, утвердивъ слѣдующія предложенія.

250. Отрѣзанная призьма называется тѣло ABCDEF (ф. 136), кое остается, когда отъимутъ часть призьмы плоскостію ABC, наклонною къ основанію.

251. Треугольная отрѣзанная призма, составлена изъ трехъ пирамидъ, изъ коихъ каждая имѣетъ основаніемъ, основаніе DEF призмы, вершинами же первая имѣетъ точку B, вторая A, третія C.

Съ малымъ вниманіемъ можно представить себѣ сію отрѣзанную призьму, какъ составленную изъ двухъ пирамидъ, одной треугольной, имѣющей вершиною точку B, а основаніемъ треугольникъ DEF; другой четыреугольной, коея вер-

шина таже точка в, а основанїе четыреугольникъ ADFC.

Ежели проведемъ дїагональ AF, можно представить четыреугольную пирамиду BADFC, какъ составленную изъ двухъ треугольныхъ пирамидъ BADF, BACF. И такъ пирамида BADF равна толстотою пирамидѣ EADF, которая, имѣя тоже основанїе ADF, будетъ имѣть вершиною своею точку E; ибо, когда линея BE параллельна къ плоскости ADF, сїи двѣ пирамиды будутъ имѣть туже высоту; но на пирамиду EADF можно смотрѣть, какъ на имѣющую основанїе EDF, а вершину, точку A. Чего ради по сихъ поръ видимъ двѣ изъ трехъ пирамидъ, изъ коихъ, мы сказали, отрѣзанная призма должна быть составлена; по сему осталось только показать, что пирамида BACF равна толстотою пирамидѣ, коя будетъ имѣть основанїемъ EDF, а вершиною точку C. Сїе легко видѣть, когда проведемъ дїагональ CD, и примѣтимъ, что пирамида BACF должна быть равна пирамидѣ EDCF; потому что сїи двѣ пирамиды имѣютъ вершинами ихъ B и E на тойже линеи BE, параллельной къ плоскости ихъ основанїй ACFD, и что сїи основанїя ACF и CFD равны, послику онѣ суть треугольники, имѣющїе тоже основанїе CF, и заключенные между тѣми же параллельными AD и CF. И такъ пирамида BACF равна пирамидѣ EDCF; но на оную можно смотрѣть, какъ на имѣющую основанїемъ DEF, а вершиною точку C: слѣдовательно самою вещїю отрѣзанная призьма составлена изъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ основанїемъ общїй треугольникъ DEF, вершинами же первая точку B, вторая точку A, третїя C.

252. По чему, дабы сыскать толстоту треугольной отрѣзанной призьмы, должно опустить отъ каждаго изъ угловъ верьхняго

основанія перпендикуляръ на нижнее, и умножить нижнее основаніе на треть суммы сихъ трехъ перпендикуляровъ.

253. Изъ сего предложенія можно вывесть многія послѣдствія для измѣренія отрѣзанныхъ призмъ, не только треугольныхъ, но и другихъ, сверхъ сего даже и другихъ тѣлъ: естьли представить, на примѣръ, что изъ всѣхъ угловъ тѣла ограниченнаго плоскими поверхностями, проведены на туже плоскость, взятую по произволенію, перпендикуляры, отъ чего произойдетъ столько отрѣзанныхъ призьмъ, сколько будетъ плоскостей въ тѣлѣ. И какъ всякую отрѣзанную призьму легко измѣрить по предложенному нами; по чему всякое тѣло, ограниченное плоскими поверхностями, столь же легко можетъ измѣрено быть на тѣхъ же началахъ. Не будемъ входить въ сіи подробности, а положимъ себѣ за предѣлъ вывесть послѣдствіе полезное нашему предмету.

254. Чего ради пусть будетъ ABCDEFGH (ф. 137) тѣло, составленное изъ двухъ треугольныхъ отрѣзанныхъ призьмъ ABCEFG, ADCEHG, коихъ надстоящія AE, BF, CG, DH пусть будутъ перпендикулярны къ основанію, и кои пусть будутъ такія призьмы, что основанія ихъ EFG, EHG составляютъ параллелограммъ EFGH; а верьхнія основанія, дабы предложеніе было генеральнѣе, пусть будутъ двѣ плоскости, наклоняющіяся въ разныя стороны къ основанію EFGH. Изъ вышесказаннаго (252) слѣдуетъ, что тѣло ABCDEFG равно треугольнику EFG, умноженному на $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$; ибо отрѣзанная призьма ABCEFG равна (252) треугольнику EFG умноженному на $\frac{BF+AE+GC}{3}$; и по тойже причинѣ, отрѣзанная призьма ADCEHG равна треугольнику EHG, или (что все тоже) треугольнику EFG

умноженному на $\frac{AE+GC+HD}{3}$; слѣдовательно сумма сихъ двухъ отрѣзанныхъ призьмъ равна треугольнику EFG, умноженному на $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$.

Пусть теперь будетъ тѣло (ф. 138), содержимое въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ ABLM, ablm, и въ другихъ двухъ ABba, MLlm, параллельныхъ между собою и перпендикулярныхъ къ плоскости BLlb, и наконецъ въ кривой поверхности AHMmha; и представимъ сїе тѣло разсѣченное плоскостями cd, EF, Gh и проч. параллельными плоскости ABba, равно одна отъ другой отстоящими, и толико сближенными, чтобъ AD, ad, DF, df и проч. можно было взять за прямыя линеи. Положимъ наконецъ, что двѣ плоскости ABLM, ablm такъ близки одна къ другой, что можно смотрѣть, безъ ощутительной погрѣшности, на сѣченїя Dd, Ff, Hh и проч. какъ на прямыя линеи; очевидно, что части тѣла ADdabBCc, DFfdcCEe и проч. находятся въ томъ же случаѣ, какъ и тѣло въ 137 фигурѣ. Почему сумма сихъ тѣлъ будетъ равна треугольнику bBC, умноженному на $\frac{AB+2ab+2CD+cd}{3}+\frac{CD+2cd+2EF+ef}{3}+\frac{EF+2ef+2GH+gh}{3}+\frac{GH+2gh+2JK+ik}{3}+\frac{JK+2ik+2LM+lm}{3}$; то есть, когда соберешь подобныя количества, сумма будетъ равна треугольнику bBC, умноженному на $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+JK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$. И какъ треугольникъ bBC равенъ $\frac{Bb\times BC}{2}$, цѣлое тѣло будетъ равно $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+JK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$.

Дабы изобразить сїе выраженїе простѣе, замѣтимъ сїе, что ежели бы вмѣсто $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$, находящихся между скобками, было количество $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm$, предложенное

тѣло было бы равно половинѣ суммы двухъ поверхностей ABLM, ablm, умноженной на толщину тѣла Bb: ибо (154) площадь ABLM равна $BC \times (\frac{1}{2}AB + CD + EF + GH + JK + \frac{1}{2}LM)$, а площадь ablm, по тойже причинѣ, равна bc или $BC \times (\frac{1}{2}ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2}lm)$; по чему половина суммы сихъ двухъ площадей, умноженная на толщину Bb, будетъ $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + JK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; слѣдовательно предложенное тѣло не инымъ различествуетъ отъ сего произведенія, какъ количествомъ, коимъ $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$ превосходитъ количество $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; чего ради и легко видѣть (Ариѳ. 103), что сія разность есть $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; почему искомое тѣло равно $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + JK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm) + \frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; и такъ удобно примѣтить, что $\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm$ есть количество очень малое въ сравненіи съ количествомъ находящимся между двумя перьвыми скобками; поелику, когда двѣ плоскости ABLM, ablm полагаются мало отстоящими, разность линей AB и ab и линей LM и lm не можетъ быть, какъ самое малое количество. По сему толстоту сего тѣла можно выразить, $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + JK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; т. е. $Bb \times \left(\frac{ABLM + ablm}{2}\right)$

Чего ради можно сказать, что для сысканія толстоты въ отрѣзкѣ тѣла, содержимомъ въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ, мало одна отъ другой отстоящихъ, и какой бы фигуры онѣ ни были, должно умножить половину суммы сихъ двухъ поверхностей на толщину сего отрѣзка.

255. Ежели бы толщина въ отрѣзка была очень велика, такъ что не можно бы было взять линей AA, Dd за прямыя линеи; тогда должно представить тѣло раздѣленное на многіе слои, равныя толщины, плоскостями параллельными одной изъ поверхностей ABLM, abIm, и измѣряя сіи поверхности ABLM, abIm и ихъ параллельныя, могли бы мы получить толстоту, сложивъ всѣ среднія поверхности и половину суммы двухъ крайнихъ ABLM, abIm, и сію сумму умноживъ на толщину одного изъ слоевъ. Сіе есть непосредственное послѣдствіе того, о чемъ мы недавно говорили.

Теперь очень легко сдѣлать прикладъ онаго къ измѣренію части трюма, кою грузъ подавляетъ въ воду. Измѣряемъ площади двухъ горизонтальныхъ сѣченій, дѣлаемыхъ поверхностію воды, когда судно нагружено и когда оно пусто. Сіи двѣ площади сложимъ, и половину ихъ суммы умножимъ на *разстояніе сихъ двухъ плоскостей*, т. е. *на толщину слоя*, который сіи плоскости содержатъ.

Естьлибъ угодно было сыскать толстоту всего трюма, тогда бы поступили, какъ сказано (255); но должно бы было на него смотрѣть, какъ на разсѣченный на многіе слои, однако не параллельные сѣченію поверхности воды, но перпендикулярные къ длинѣ судна.

Когда измѣряютъ толстоту части трюма, кою грузъ потопляетъ, можно довольствоваться измѣреніемъ поверхности сѣченія, взятаго въ равномъ разстояніи отъ двухъ сѣченій, о коихъ мы упомянули выше, и умножить ее, какъ прежде, на толщину слоя: ибо сіе среднее сѣченіе всегда будетъ различествовать очень мало отъ половины суммы двухъ другихъ.

Между нѣкоторыми предметами, о коихъ мы разсуждаемъ въ прикладѣ Алгебры къ Геометрїи, найдутся средства къ измѣренїю гораздо вѣрнѣйшїя; однако и теперь предложенныя нами, будутъ всегда достаточны, лишь бы только площади были измѣряемы съ довольною точностїю, и сдѣлано бы было больше слоевъ, когда толщина будетъ велика.

Въ четвертой части сего курса увидимъ, что грузъ судна равенъ тяжести количества воды, равнаго количеству части трюма, кою онъ потопляетъ; по сему какъ скоро вычислятъ толстоту сего отрѣзка въ кубическихъ футахъ, ежели потребуется узнать вѣсъ груза, должно только умножить число кубическихъ футъ на 72 фута морской воды; но какъ всегда вычисляютъ сей грузъ бочками, вмѣсто чтобъ умножить на 72, и потомъ раздѣлить на 2000, что будетъ нужно для приведенїя въ бочки, раздѣли число кубическихъ футъ на 28, потому что 28 разъ 72 дѣлаютъ почти 2000, и сколько *разъ* 28 будетъ содержаться въ измѣренной толстотѣ, столько будетъ и бочекъ.

О измѣренїи тѣлъ саженями.

256. По объяснении (155) измѣренїя поверхностей саженями, очень мало остается намъ говорить о измѣренїи тѣлъ.

Дабы сыскать толстоту тѣла въ кубическихъ саженяхъ и частяхъ кубической сажени, надобно знать, что кубическая сажень имѣетъ 343 фута, поелику кубъ изъ линеи имѣющей 7 футъ въ длину, состоитъ изъ 343 футъ.

Кубическїй футъ содержитъ въ себѣ 1728 кубическихъ дюймовъ; а кубическїй дюймъ 1728 линей, и такъ далѣе.

257. По сему для сысканія толстоты тѣла въ кубическихъ саженяхъ, футахъ, дюймахъ, обыкновенно прриводятъ въ нижній сортъ всѣ три его измѣренія, и приведенныя такимъ образомъ умножаютъ одно на другое; а дабы привести произведеніе изъ нижшаго въ вышшій, (полагая, что нижшій сортъ былъ точки), раздѣляемъ сысканное произведеніе на 1728, 1728, 1728, и 343 по очереди, и такъ далѣе.

258. Положимъ, что данъ будетъ параллелепипедъ, у коего 1 с. 2 ф. $8\frac{2}{5}$ д. въ длину; 5 ф. $11\frac{1}{2}$ д. въ ширину и 2 с. 4 ф. $7\frac{3}{4}$ д. въ высоту, и коего потребно сыскать толстоту; поступаю такъ: привожу всѣ его три измѣренія въ нижній сортъ.

$$1с \times 7 = 7ф + 2ф = 9ф \times 12 = 108д + 8\tfrac{2}{5} = 116\tfrac{2}{5}д.$$
$$5ф \times 12 = 60д + 11\tfrac{1}{2} = 71\tfrac{1}{2}д.$$
$$2с \times 7 = 14ф + 4 = 18ф \times 12 = 216д + 7\tfrac{3}{4} = 223\tfrac{3}{4}д;$$

потомъ умножаю сіи приведенныя одно на другое, т. е. $116\frac{2}{5}д = \frac{582}{5} \times \frac{143}{2} = \frac{41613}{5} = 8322\frac{3}{5}$, сіе будетъ площадь основанія; и естьли оную умножу высотою, а именно $\frac{41613}{5} \times \frac{895}{4} = \frac{7448727}{4} = 1862181\frac{3}{4}$ ддд: получу толстоту параллелепипеда въ кубическихъ дюймахъ.

259. Дабы оные привести въ сажени, футы и проч. раздѣляю ихъ прежде на 1728, частное же, изъ сего дѣленія произшедшее, на 343: чрезъ что найду, сколько въ толстотѣ кубическихъ саженъ, футъ и дюймовъ, а именно $1862181\frac{3}{4} = \frac{7448727}{4} \times \frac{1}{1728} = 1077$. ффф, $1125\frac{3}{4}$ ддд. Когдаже частное 1077 раздѣлю на 343, т. е, $\frac{1077}{343} = 3$ ссс, 48 ффф, и прибавлю остальные $1125\frac{3}{4}$ ддд, будетъ толстота параллелепипеда 3 ссс, 48 ффф $1125\frac{3}{4}$ ддд.

260. Понеже для сысканія толстоты призмы должно умножить площадь ея основанія на ея высоту; изъ сего слѣдуетъ, какъ находить ее высоту или основаніе, когда даны будутъ толстота и основаніе, или толстота и высота; а имянно: толстоту должно раздѣлять на основаніе, ежели потребно знать высоту; а на высоту, когда потребно основаніе. Но надобно замѣтить, что въ строгости не толстоту раздѣляютъ по справедливости на основаніе или высоту, но тѣло на тѣло. Самою вещію видно, что когда измѣряемъ тѣло, не иное дѣлаемъ, какъ повторяемъ другое, того же съ нимъ основанія, столько разъ, сколько высота его содержится въ высотѣ измѣряемаго; или повторяемъ тѣло той же высоты столько разъ, сколько площадь основанія его содержится въ основаніи измѣряемаго. Посему, когда извѣстны будутъ толстота и наприм: площадь основанія, дабы сыскать высоту, должно искать, сколько разъ предложенная толстота содержитъ въ себѣ толстоту тѣла тогожe съ нимъ основанія, и частное числомъ единицъ своихъ покажетъ число частей высоты.

Съ симъ подлогомъ, ежели въ призьмѣ, коея толстота 3 ссс. 48 ффф, $1125\frac{3}{4}$ ддд, а площадь основанія 1 сс, 8 фф. $114\frac{3}{5}$ дд, потребно узнать высоту, тогда площадь основанія представляютъ тѣломъ, кое имѣетъ высотою единицу нижшихъ мѣръ основанія, какъ на прим: здѣсь дюймъ, (которая и въ умноженіи и въ дѣленіи никакой перемѣны не производитъ), и раздѣляютъ бо́льшее тѣло на ме́ншее: частное, числомъ своихъ единицъ покажетъ число нижшихъ мѣръ въ высотѣ. А какъ высота лежитъ между двумя точками, по сему и имѣетъ одно протяженіе; чего ради и мѣра сего протяженія будетъ простая, а не квадратная.

И такъ, дабы рѣшить предложенной вопросъ, какъ сыскать высоту призьмы, коея толстота 3 ссс, 48 ффф, $1125\frac{3}{4}$ ддд, а площадь основанія 1 сс, 8 фф. $114\frac{3}{5}$ дд: поступаемъ слѣдующимъ образомъ: $3 с \times 343 = 1029$ ф. $+ 48 = 1077$ ф $\times 1728 = 1861056$ д $+ 1125\frac{3}{4} = 1862181\frac{3}{4}$ ддд.

$1 с \times 49 = 49$ ф $+ 8 = 57$ ф $\times 144 = 8208$ д $+ 114\frac{3}{5} = 8322\frac{3}{5}$ дд, и раздѣливъ первое на послѣднее, то есть: $\frac{7448727 \times 5}{4 \times 41613} = 223\frac{3}{4}$, сіе будетъ высота въ дюймахъ, кои обративъ въ вышшій сортъ, какъ прежде видѣли, получимъ высоту 2 с, 4 ф, $7\frac{3}{4}$ д.

Ежели толстота и высота извѣстны, а потребно сыскать основаніе, мы и въ семъ случаѣ данную высоту представляемъ тѣломъ, у коего площадь основанія единица нижшей мѣры данныя высоты. Но какъ всякая площадь имѣетъ два протяженія, длину, и ширину, слѣдственно и мѣра ея будетъ мѣра квадратная, а не простая: по сему и дѣленіе *отправится по предписанному* правилу (Ариѳ. 124 и слѣд.)*

О измѣреніи лѣсовъ.

261. Послѣ говореннаго нами о измѣреніи вообще, очень мало остается сказать о измѣреніи лѣсовъ.

Въ мореходствѣ измѣряютъ лѣса кубическими футами, и кубическими частями кубическаго фута; и такъ должно только измѣрить протяженія футами и частями фута, кои приведши въ нижшій сортъ, и умноживъ между собою, обращаютъ въ кубическія линеи, кубическіе дюймы, кубическіе футы, какъ показано было выше.

* Примѣровъ здѣсь не полагаю, поелику всякъ изъ упражняющихся можетъ найти довольное ихъ число въ другихъ книгахъ.

Что касается до измѣренія лѣсовъ солидами, т. е. параллелепипедами, кои имѣютъ высоту въ двѣ сажени, а основаніе 49 квадратныхъ дюймовъ, таковой образъ измѣренія ихъ здѣсь не въ употребленіи, по сему и описаніе его оставляется.

О содержаніяхъ тѣлъ вообще.

262. Сравнивать два тѣла, называется; сыскивать, сколько разъ число мѣръ нѣкотораго роду, содержимыхъ въ одномъ изъ сихъ тѣлъ, содержитъ въ себѣ число мѣръ тогоже роду, содержимыхъ въ другомъ.

263. Двѣ призьмы, или два цилиндра, или одна призьма и одинъ цилиндръ, суть между собою, какъ произведенія ихъ основаній на ихъ высоты. Сіе очевидно, понеже каждое изъ сихъ тѣлъ равно произведенію своего основанія на свою высоту, какой бы фигуры при томъ основаніе ни было.

Слѣдовательно, призьмы или цилиндры, или призьмы и цилиндры той же высоты, суть между собою, какъ ихъ основанія; и призьмы и цилиндры того же основанія, суть между собою, какъ ихъ высоты. Ибо содержаніе произведеній основаній на высоты не перемѣнится, по оставленіи общаго сомножителя, который въ нихъ находится, когда основаніе или высота есть тоже въ двухъ тѣлахъ.

По чему и двѣ всякія пирамиды, или два конуса, или пирамида и конусъ, суть въ содержаніи ихъ высотъ, когда основанія ихъ равны: ибо каждое изъ сихъ тѣлъ есть треть призьмы тогоже основанія и тойже высоты (240).

264. Толстоты подобныхъ пирамидъ суть между собою, какъ кубы высотъ сихъ пирамидъ, или вообще, какъ кубы двухъ сходственныхъ линей сихъ пирамидъ.

Ибо двѣ подобныя пирамиды могутъ быть представлены двумя такими пирамидами, какъ JABCDF, jabcdf (ф. 115), понеже сіи двѣ пирамиды составлены изъ тогоже числа подобныхъ плоскостей, каждыя каждой и подобно положенныхъ. Двѣ же пирамиды суть вообще, какъ произведенія ихъ основаній на ихъ высоты, а основанія, кои здѣсь фигуры подобныя, суть между собою, какъ квадраты высотъ JP, jp (202): двѣ пирамиды будутъ между собою, какъ произведенія квадратовъ высотъ, на самыя высоты; ибо можно (99) вмѣсто содержанія оснований вставить содержаніе квадратовъ высотъ. И понеже (213) высоты суть пропорціональны всѣмъ другимъ сходственнымъ протяженіямъ, по чему и кубы ихъ будутъ также пропорціональны кубамъ сходственныхъ протяженій (Ариѳ. 191); слѣдовательно вообще двѣ подобныя пирамиды суть между собою, какъ кубы ихъ сходственныхъ протяженій.

265. *По сему вообще толстоты двухъ подобныхъ тѣлъ суть между собою, какъ кубы ихъ сходственныхъ линей.* Ибо подобныя тѣла могутъ раздѣлены быть на тоже число пирамидъ подобныхъ каждая каждой; и какъ всякія двѣ изъ сихъ подобныхъ пирамидъ будутъ между собою въ томъ же содержаніи, понеже онѣ содержатся, какъ кубы сходственныхъ ихъ протяженій, кои суть въ томъ же содержаніи со всякими другими двумя сходственными протяженіями; изъ сего слѣдуетъ, что сумма пирамидъ перьваго тѣла будетъ также къ суммѣ пирамидъ втораго въ томъ же содержаніи съ кубами сходственныхъ протяженій.

По чему и толстоты шаровъ суть между собою, какъ кубы ихъ радіусовъ или діаметровъ.

Чего ради приводя себѣ на память все предъидущее, видимъ 1 е, что обмѣры подобныхъ фигуръ суть въ простомъ содержанїи сходственныхъ линей; 2 е, что площади подобныхъ фигуръ, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ или линей; 3 е, что толстоты подобныхъ тѣлъ суть между собою, какъ кубы ихъ сходственныхъ линей.

И такъ, естьли два подобныя тѣла, на прим. два шара, имѣютъ дїаметры ихъ въ содержанїи 1 : 3: окружности великихъ ихъ круговъ будутъ также въ содержанїи 1 : 3; поверхности сихъ шаровъ будутъ въ содержанїи 1 : 9; а толстоты, какъ 1 : 27; т. е. что окружность одного изъ великихъ круговъ перьваго шара, трижды взятая, равна будетъ окружности одного изъ великихъ круговъ втораго; поверхность перваго, 9 разъ взятая, равна поверхности втораго; и на конецъ перьвый шаръ 27 разъ взятый, равенъ второму.

По сему, дабы сдѣлать тѣло подобное другому, и коего толстота была бы къ толстотѣ въ данномъ содержанїи, на прим. 2 хъ къ 3; должно ему дать такїя протяженїя, чтобъ кубъ одного какого нибудь изъ сихъ протяженїй былъ къ кубу сходственнаго протяженїя того тѣла, коему сїе должно быть подобно, какъ 2 : 3. На прим. ежели есть шаръ, коего дїаметръ 8 дюймовъ, и спрашивается, какой долженъ быть дїаметръ шара, который бы былъ $\frac{2}{3}$ перьваго..... Должно будетъ сыскать четвертый членъ сея пропорцїи $1 : \frac{2}{3}$ или 3 : 2 : : кубъ 8 ми, т. е. :: 512 къ четвертому. Сей четвертый членъ, который есть $341\frac{1}{3}$, будетъ кубъ искомаго дїаметра; чего ради извлекши кубическїй корень (Ариѳ. 159), получишь 6, 99 д. для сего дїаметра, т. е. почти 7 д, что можно повѣрить слѣдующимъ образомъ: Сыщемъ какїя суть толстоты двухъ шаровъ, изъ коихъ дїаметръ перьваго 8 д, а другаго 7 д: окружности

ихъ великихъ круговъ сыщутся по симъ двумъ пропорцїямъ (152):

7 : 22 :: 8

7 : 22 :: 7

Четвертые члены суть $25\frac{1}{7}$ и 22. Умноживъ сїи окружности, каждую на свой дїаметръ, получишь (222) поверхности сихъ шаровъ, кои будутъ $201\frac{1}{7}$ и 154; на конецъ умноживъ сїи поверхности на $\frac{1}{3}$ ихъ радїусовъ, т. е. по порядку на шестину 8 ми или 7 ми, получишь толстоты $268\frac{4}{21}$ и $179\frac{2}{3}$, коихъ содержанїе есть тоже съ содержанїемъ $\frac{5632}{21} : \frac{539}{3}$ по приведенїи въ дроби, или (по умноженїи двухъ терминовъ послѣдней дроби на 7, и по оставленїи общаго знаменателя). тоже съ содержанїемъ 5632 къ 3773; и такъ (Ариѳ. 167) знаменатель содержанїя сихъ двухъ количествъ есть $1\frac{1852}{3373}$, т. е. по приведенїи въ десятичныя 1, 49; а содержанїе 3 хъ къ 2 есть 1, 5 или 1, 50 (Ариѳ. 30); по чему разность ихъ есть только $\frac{1}{100}$; сїя разность происходитъ отъ того, что дїаметръ вычисленъ не съ надлежащею точностїю; сверьхъ сего и содержанїе 7 къ 22 не есть точно содержанїе дїаметра къ окружности.

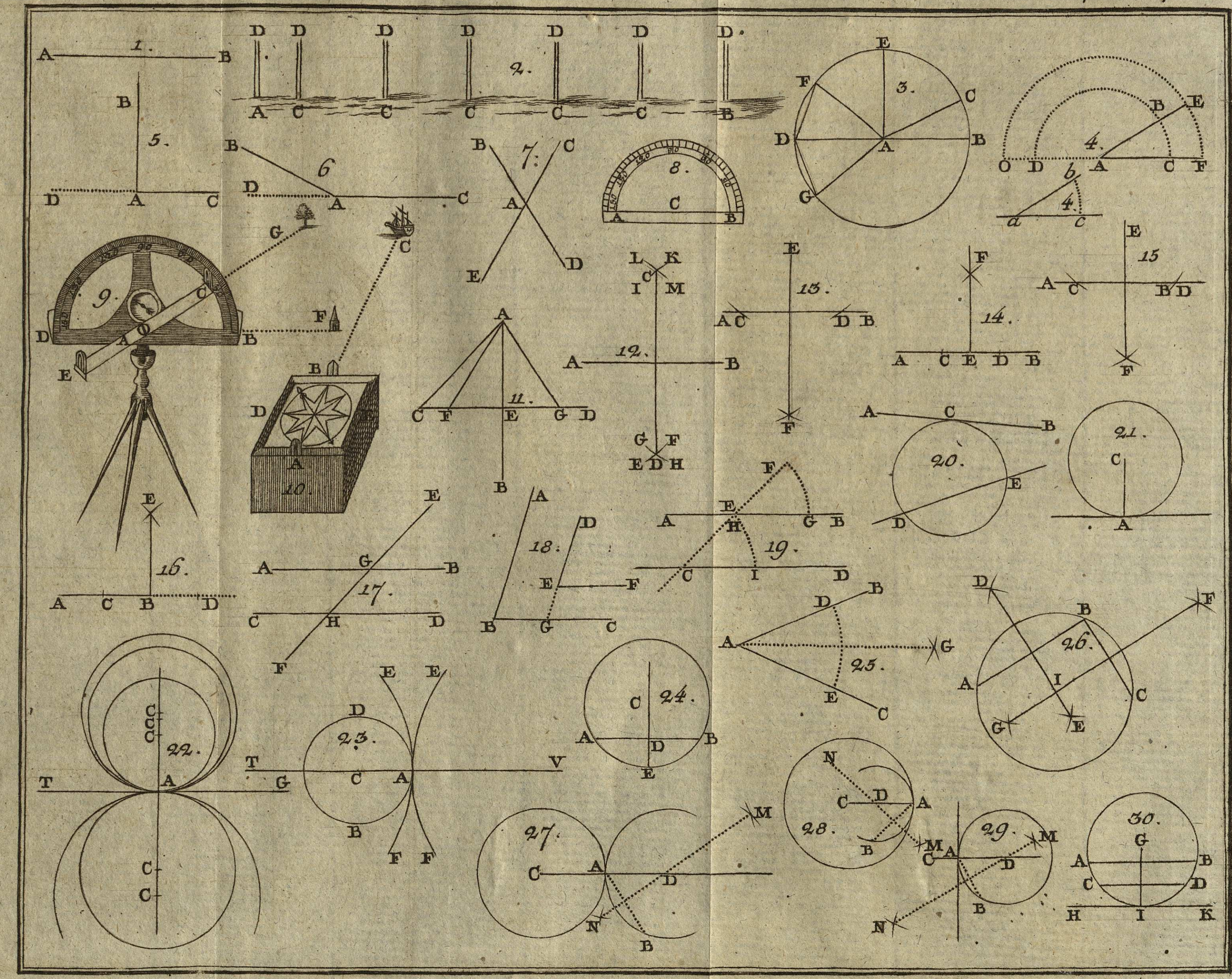
Въ тѣлахъ составленныхъ изъ тогоже вещества, тяжести суть пропорцїональны количеству вещества или толстотѣ; по чему когда извѣстна тяжесть одной пули извѣстнаго дїаметра, дабы найти оную въ другой пулѣ другаго дїаметра и тогоже вещества, должно сдѣлать сїю пропорцїю: кубъ дїаметра пули, коея тяжесть извѣстна, къ кубу дїаметра другой, какъ тяжесть первой къ четвертому члену, который будетъ тяжесть втораго.

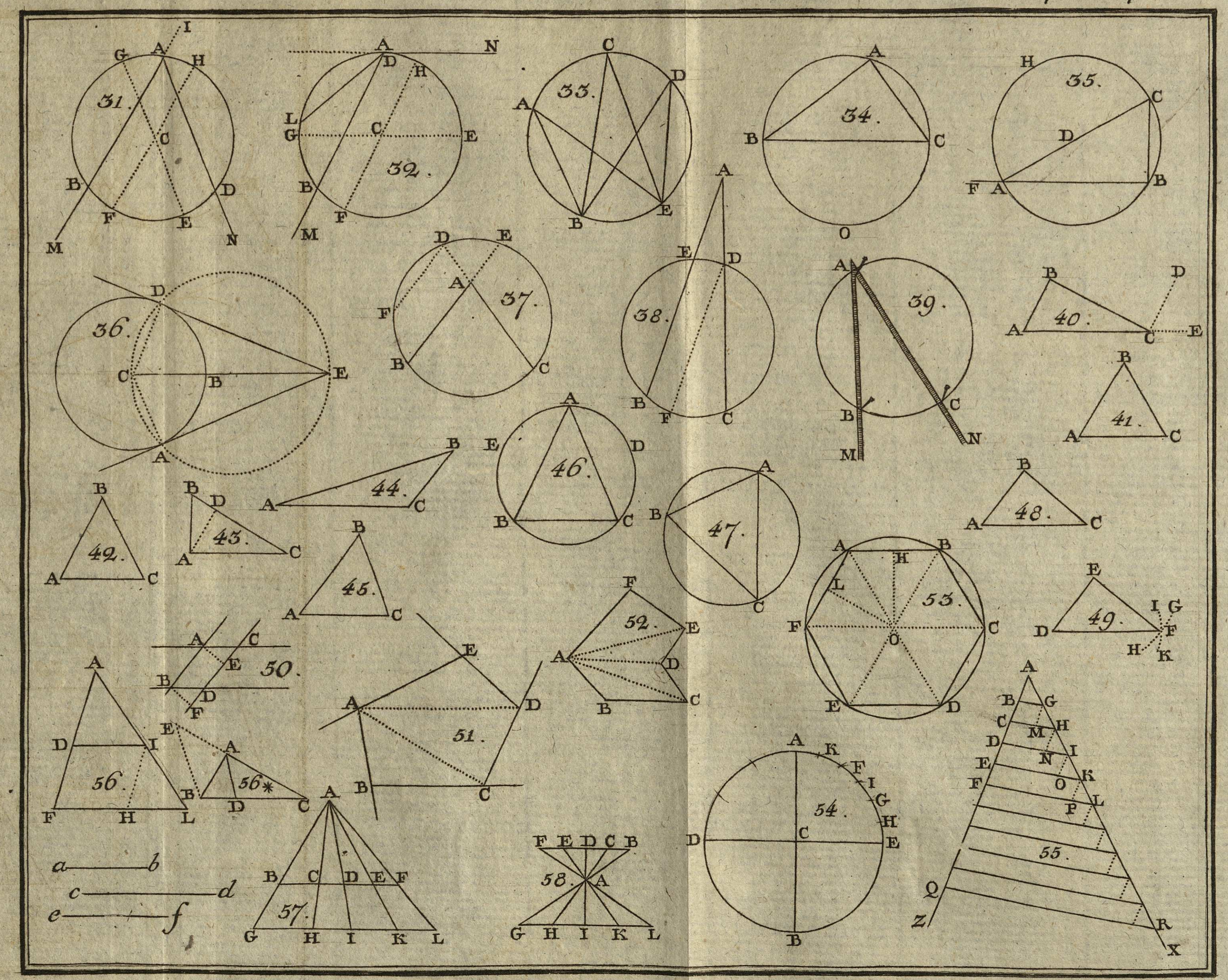
Видѣли мы (162), что въ двухъ судахъ совершенно подобныхъ парусности были бы, какъ квадраты высотъ мачтъ, и по тому сказали мы, какъ квадраты долготъ судна, понеже всѣ сход-

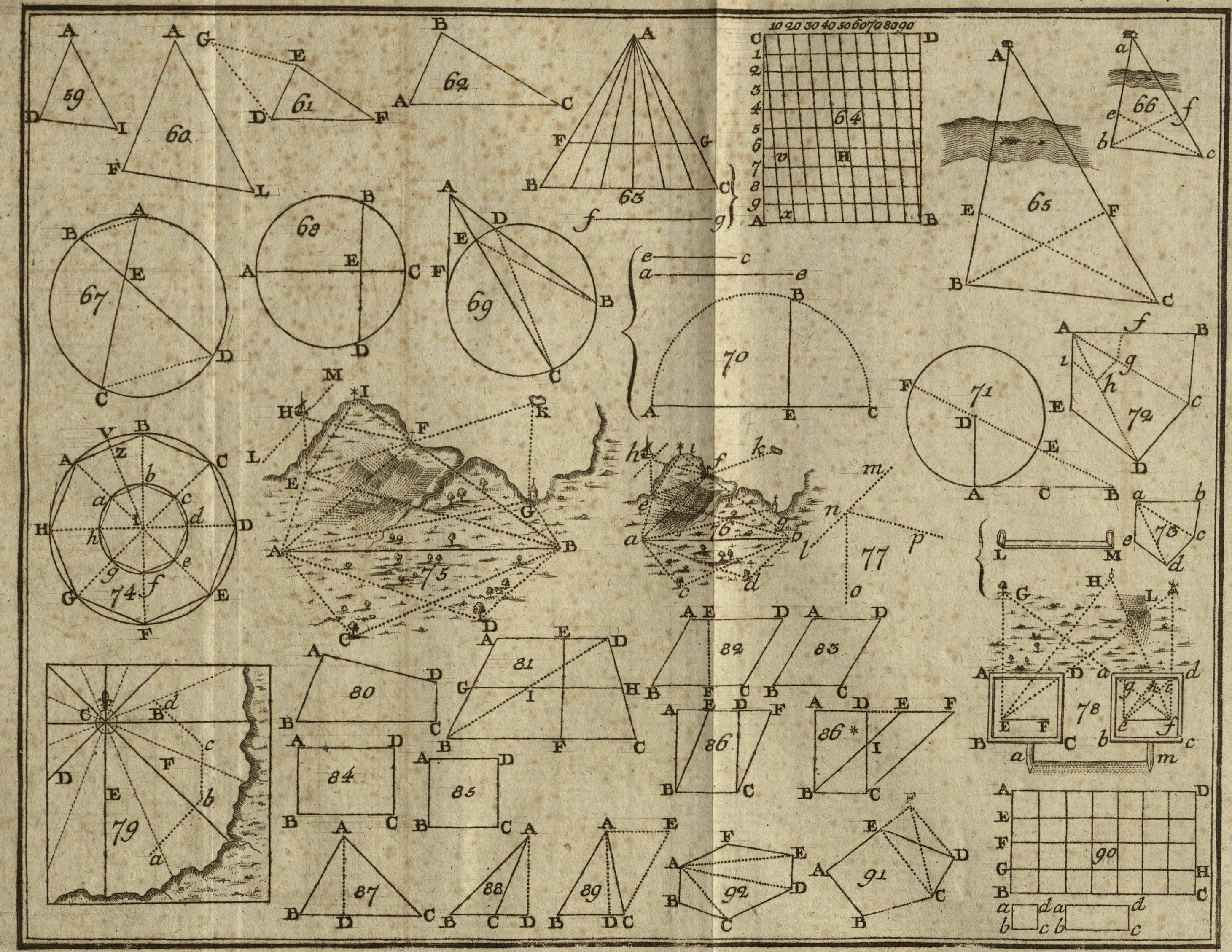
ственныя протяженія подобныхъ тѣлъ суть въ томъ же содержаніи. Видимъ же здѣсь, что тяжести подобныхъ тѣлъ и тогоже вещества суть, какъ кубы сходственныхъ измѣреній; по чему явно, что, ежели бы два подобныя судна имѣли пропорціональныя мачты, количества вѣтра, кои бы онѣ могли получить, были бы, какъ квадраты ихъ долготъ; а тяжести, какъ кубы; и какъ содержаніе квадратовъ не есть тоже съ содержаніемъ кубовъ, но еще меньше онаго, такъ какъ и легко въ семъ убѣдиться, сіе одно разсужденіе показываетъ, что парусность, коя свойственна одному судну, не будетъ свойственна судну мѣньшему, хотя бы и уменьшили пропорціонально два протяженія сея парусности. Находятся еще другія разсужденія, кои входятъ въ изслѣдованіе сего вопроса, но онѣ собственно надлежатъ до Механики. Мы не предполагаемъ себѣ здѣсь другаго виду, какъ только пріуготовить умы къ предвидѣнію употребленій, кои можно сдѣлать на началахъ доселѣ положенныхъ для изслѣдованія таковаго рода вопросовъ.

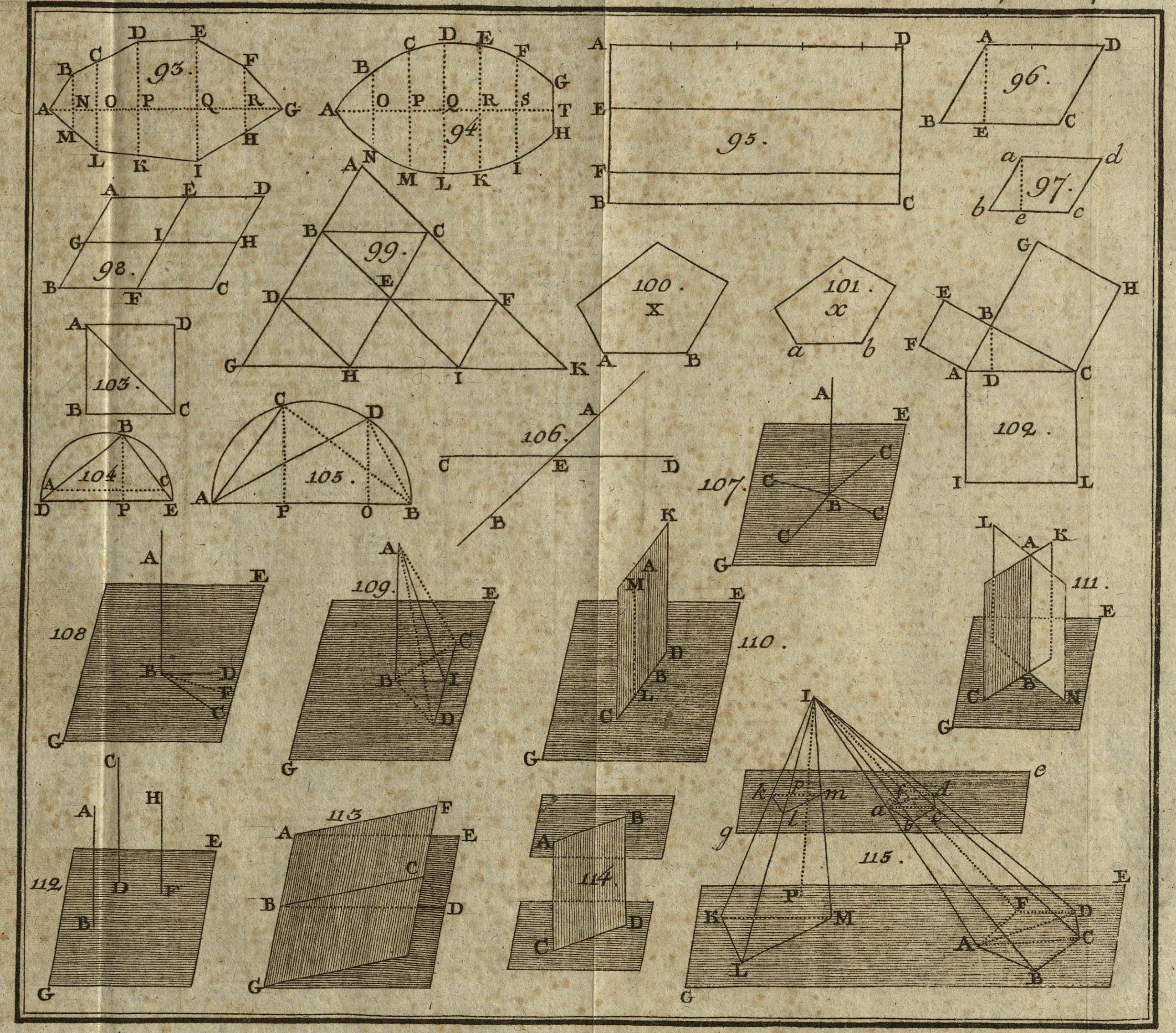
КОНЕЦЪ.

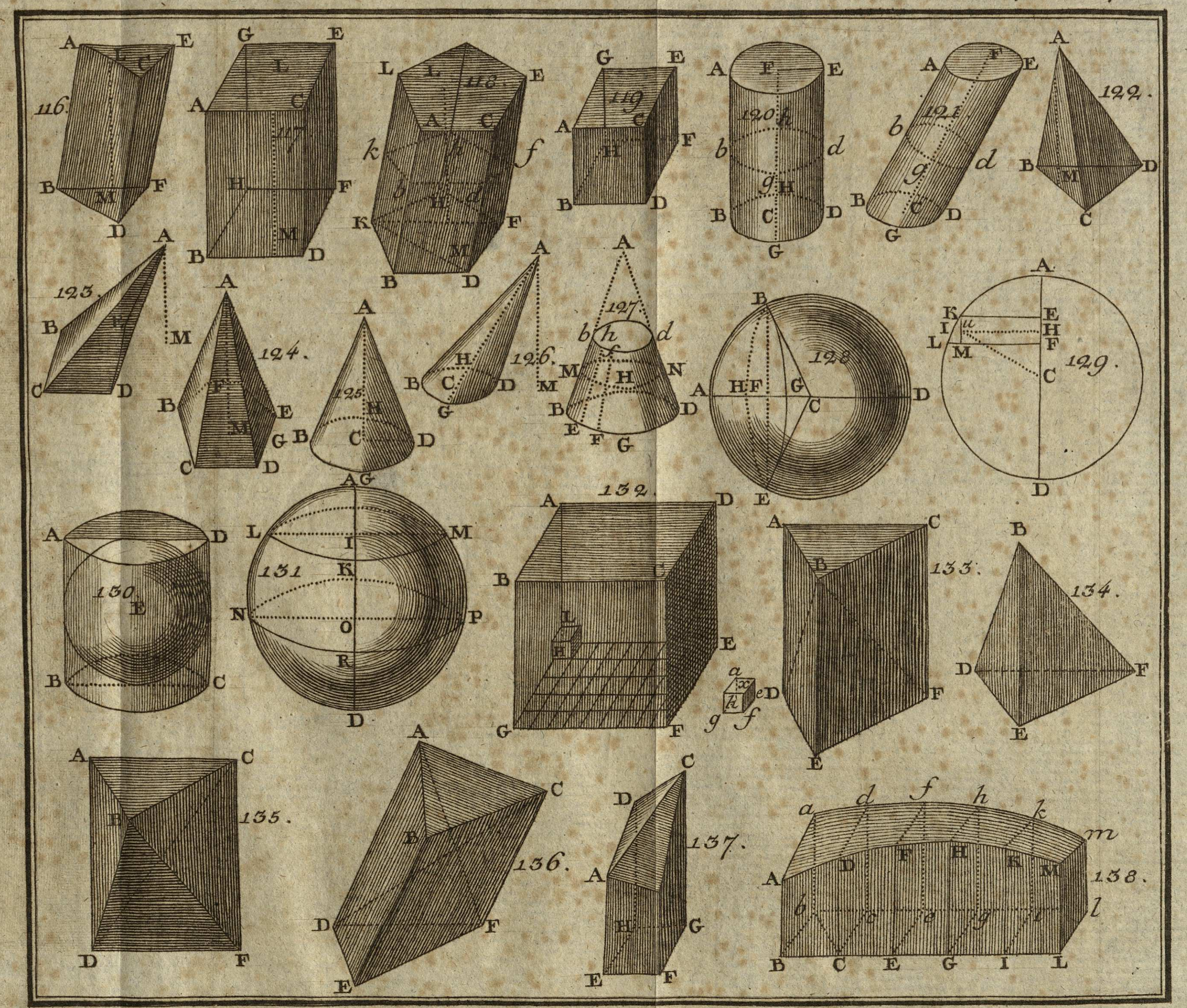


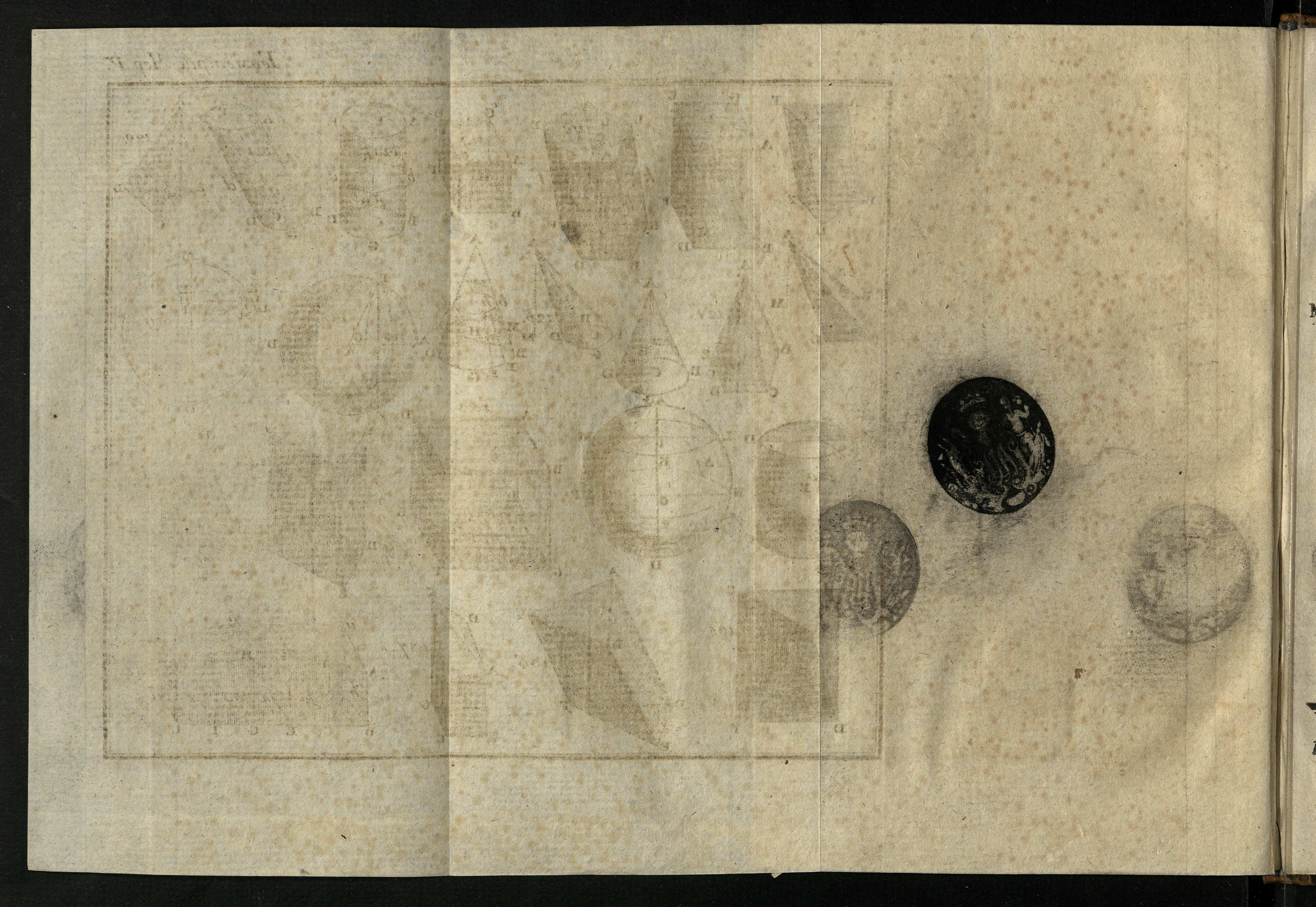

1. A B
2. D D D D D D D A C C C C C B
3. E F C D A B G
4. O D A B E C F
4. a b c
5. B D A C
6. B D A C
7. B C A E D
8. C A B
9. G C F D O B A E
10. B D A C
11. A C F E G D B
12. L K C I M A B G F E D H
13. E A C D B F
14. F A C E D B
15. E A C B D F
16. E A C B D
17. E A G B C H D F
18. A D E F B G C
19. F A E H G B C I D
20. A C B D E
21. C A
22. C C C A T G C C
23. D T C A V B E E F F
24. C A D B E
25. A D B G E C
26. D B F A I C G E
27. C A D M N B
28. N C D A B
29. M A C D M B N
30. G A B C D H I K








116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.



ПЛОСКАЯ и СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІИ

Переведенныя изъ курса Г. Безу,

Морскаго Шляхетнаго Кадетскаго Корпуса Гимназистами

Гаврила давыдовъ

Иваномъ Соболевымъ и Никифоромъ Лебедевымъ.



Гаврилы Давыдовъ

Печатаны при Типографіи онагожъ Корпуса, 1794 года.

Макинъ

О ТРИГОНОМЕТРІИ.

266. Слово тригонометрія значитъ мѣра треугольниковъ. Вообще же разумѣется подъ симъ именемъ наука опредѣлять положенія и измѣренія различныхъ частей протяженія, знавъ нѣкоторыя изъ оныхъ.

Ежели представимъ, что различныя точки воображаемыя въ какомъ нибудь пространствѣ, соединены взаимно прямыми линѣями; то три вещи предлежать будутъ нашему разсужденію: 1е длина сихъ линѣй, 2е углы, которые онѣ между собою составляютъ; 3е углы составляемые плоскостями, на коихъ оныя линѣи самою вещію, или мысленно находятся. Отъ сравненія сихъ трехъ предмѣтовъ зависитъ рѣшеніе всѣхъ вопросовъ, которые можно предложить о измѣреніи протяженія, и частей онаго. Наука же опредѣлять всѣ сіи вещи, знавъ нѣкоторыя изъ оныхъ, состоитъ въ рѣшеніи сихъ двухъ главныхъ вопросовъ:

1ой. Зная три изъ шести вещей, которыя входятъ въ прямолинѣйный треугольникъ, найти три другія, когда сіе возможно.

2ой. Зная три изъ шести вещей составляющихъ сферической треугольникъ, (т. е. треугольникъ составленный на поверхности шара изъ трехъ дугъ круга, имѣющихъ центромъ центръ сего же самаго шара) найти три прочія, когда сіе возможно.

Перьвый вопросъ есть предмѣтъ Тригонометріи, называемой плоскою тригонометріею. Поелику шесть вещей въ оной разсуждаемыя, суть на одной и той же плоскости. Называютъ ее также тригонометріею прямолинѣйною.

Второй вопросъ принадлежитъ тригонометріи сферической. Шесть вещей въ ней разсуждаемыя, суть на различныхъ плоскостяхъ, какъ въ последствіи увидимъ.

О плоской или прямолинейной тригонометріи.

267. Плоская тригонометрія есть часть Геометріи, которая научаетъ определять или вычислять три изъ шести вещей прямолинейнаго треугольника, зная три другія части, когда сіе возможно.

Когда сіе возможно, говорю; ибо естьли бы фиг. 140. на прим. известны были только три угла, то не льзя бы было определить сторонъ. И въ самой вещи, ежели чрезъ точку D, взятую произвольно на стороне AB треугольника ABC, котораго, положимъ, три угла известны, проведена будетъ DE паралельная BC; то будетъ треугольникъ ADE, имеющій теже углы, какіе и треугольникъ ABC (37). А изъ сего видно, что можно такимъ образомъ составить безчисленное множество другихъ треугольниковъ, кои будутъ иметь теже самые углы. Следовательно вычисленіе должно бы показать вдругъ безчисленное множество различныхъ сторонъ. И такъ вопросъ въ семъ случае есть совершенно неопределенный.

Мы увидимъ однакожъ, что ежели не можно определить величинъ сторонъ, можно по крайней мере определить ихъ содержаніе.

Но когда изъ трехъ известныхъ или данныхъ вещей, будетъ одна сторона, то можно всегда определить все прочее. Однако есть одинъ случай, въ которомъ остается нечто неопределительнымъ; а именно: положимъ, что въ

треугольникѣ ABC извѣстны двѣ стороны AB и фиг. 141.
BC, и уголъ A, противулежащій одной изъ сихъ сторонъ: не льзя опредѣлить величины угла C, ниже стороны AC, развѣ зная, острый или тупый сей уголъ C; въ самомъ дѣлѣ, ежели представить, что точкою B, какъ центромъ, и радіусомъ равнымъ сторонѣ BC, будетъ описана дуга CD, и ежели отъ D, гдѣ сія дуга встрѣчается съ AC, будетъ проведена BD; то составится другой треугольникъ ABD, въ которомъ будетъ все то извѣстно, что извѣстно въ треугольникѣ ABC, т. е. уголъ A, сторона AB и сторона BD равная BC; и такъ имѣемъ здѣсь тѣже вещи для опредѣленія угла BDA, какія были въ треугольникѣ ABC для опредѣленія угла C.

Но между симъ и предъидущимъ случаемъ находится та разность, что здѣсь можно опредѣлить величину угла C и угла BDA, какъ мы сіе увидимъ въ послѣдствіи. Остается только неопредѣленнымъ, которую изъ сихъ двухъ величинъ должно принять, и слѣдовательно какой образъ долженъ имѣть треугольникъ. И такъ сверьхъ трехъ данныхъ вещей, должно еще знать, острый или тупый долженъ быть искомый уголъ. Впрочемъ можно замѣтить мимоходомъ, что два угла C и BDA, о которыхъ разсуждается, суть супплементъ (исполненіе) одинъ другаго; ибо уголъ BDA есть супплементъ угла BDC, который равенъ углу C, понеже треугольникъ BDC есть равнобедренный.

268. Не самые углы употребляются въ вычисленіи треугольниковъ; полагаются вмѣсто оныхъ линѣи, которыя, хотя имъ и непропорціональны, однако могутъ представлять сіи углы, и притомъ гораздо способнѣе для употребленія въ вычисленіи; ибо, какъ мы ниже сего увидимъ, онѣ пропорціональны сторонамъ треугольниковъ;

прилично убо не простираясь далѣе, показать сїи линѣи, и изъяснить, какъ могутъ онѣ заступить мѣсто угловъ.

О синусахъ, косинусахъ, тангенсахъ, котангенсахъ, секансахъ и косекансахъ.

269. Перпендикуляръ AP опущенный отъ края дуги AB на радїусъ BC проходящїй чрезъ другой край B сея дуги, называется синусъ (синъ) прямой, или просто синусъ дуги AB или угла ACB.

фиг. 142.

BP Часть радїуса находящаяся между синусомъ и краемъ дуги, называется синусъ версусъ (обращенный синъ).

BD Часть перпендикуляра возставленнаго на концѣ радїуса, заключающаяся между симъ радїусомъ BC и радїусомъ CA продолженнымъ, называется тангенсъ (*прикасательная*) дуги AB или угла ACB.

Линѣя CD, которая есть радїусъ CA, продолженный до тангенса, называется секансъ (сѣкущая) дуги AB или угла ACB.

Естьли проведенъ будетъ радїусъ CF перпендикулярный къ CB, и при оконечности онаго F перпендикулярная прямая EF, встрѣчающаяся съ продолженнымъ радїусомъ CA на точкѣ E; и ежели наконецъ опущена будетъ на CF перпендикулярная прямая AQ; то слѣдуетъ изъ предъидущихъ опредѣленїй, что AQ будетъ синусъ, FQ синусъ версусъ, FE тангенсъ, и CE секансъ дуги AF или угла ACF.

Но какъ уголъ ACF есть комплементъ (дополненїе) угла ACB; ибо сїи два угла составляютъ прямой уголъ; то можно сказать, что AQ есть

синусъ комплемента, FQ синусъ версусъ комплемента, EF тангенсъ комплемента, а CE секансъ комплемента дуги AB или угла ACB.

Дабы сократить сїи наименованїя, согласились называть косинусомъ (косиномъ), синусъ комплемента; косинусомъ версусомъ (сообращеннымъ синомъ), синусъ версусъ комплемента; котангенсомъ (соприкасательною), тангенсъ комплемента; и косекансомъ (сосѣкущею), секансъ комплемента. Почему линѣи AQ, FQ, FE, CE будутъ называемы косинусъ, косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AB или угла ACB; также линѣи AP, BP, BD, CD могутъ быть называемы косинусъ, косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AF или угла ACF; ибо дуга AB есть комплементъ дуги AF, также какъ AF комплементъ AB.

Для означенїя сихъ линѣй, говоря о какомъ либо углѣ или дугѣ; мы будемъ ставить предъ буквами, означающими сей уголъ или сїю дугу, сокращенныя слова: син. косин. тан. кот. И такъ син. AB будетъ значить синусъ дуги AB; син. ACB будетъ значить синусъ угла ACB; также кос. AB, кос. ACB будутъ значить косинусъ дуги AB, косинусъ угла ACB; а для означенїя радїуса будемъ употреблять букву R.

270. Отсюда явствуетъ, 1е, что косинусъ AQ какой нибудь дуги AB равенъ части CP радїуса содержимой между центромъ и синусомъ.

2е. Что синусъ версусъ BP равенъ разности между радїусомъ и косинусомъ.

3е. Что синусъ какой либо дуги AB есть половина хорды AG двукратной дуги ABG. Ибо радїусъ CB будучи перпендикуляренъ къ хордѣ AG, раздѣляетъ сїю хорду и дугу на двѣ равныя части (52).

271. Изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что синусъ 30° равенъ половинѣ радіуса; ибо онъ есть половина хорды 60°; или стороны правильнаго шестиугольника въ кругъ вписаннаго, которая какъ мы видѣли (93), равна радіусу.

272. Тангенсъ 45° равенъ радіусу. Ибо естьли уголъ ACB есть 45°, а уголъ CBD прямый, то уголъ CDB будетъ также равенъ 45°; слѣдовательно треугольникъ CBD будетъ равнобедренный, а посему BD равна CB.

273. По мѣрѣ увеличиванія дуги AB или угла ACB, синусъ ихъ AP увеличивается, а косинусъ AQ или CP уменшается, доколѣ дуга AB сдѣлается 90°; тогда синусъ AP сдѣлается FC, то есть равенъ радіусу, а косинусъ нуль. Поелику, когда точка A падаетъ на F, перпендикуляръ AQ становится нуль.

Въ разсужденіи тангенса BD и котангенса EF, явно, что тангенсъ BD увеличивается безпрестанно, а котангенсъ напротивъ того уменшается; такъ что когда дуга AB 90°, тангенсъ ея безконеченъ, а котангенсъ нуль. И дѣйствительно, чемъ больше становится дуга AB, тѣмъ болѣе точка D возвышается надъ BC, и когда точка A крайне близка къ F, двѣ линеи CD и BD дѣлаются почти паралельны, и встрѣчаются въ безпредѣльномъ разстояніи; слѣдовательно BD тогда безконечна; посему она таковою бываетъ, когда точка A падетъ на точку F.

274. И такъ синусъ дуги 90° равенъ радіусу, косинусъ нуль, тангенсъ безконеченъ, а котангенсъ нуль.

Поелику синусъ 90° есть самый большій изъ всѣхъ синусовъ, то называютъ его для отличія отъ другихъ, цѣлымъ синусомъ, такъ что сіи три выраженія синусъ 90°, радіусъ и цѣлый синусъ значатъ тоже.

275. Когда дуга AB становится больше 90°, синусЪ ея AP уменшается, а косинусЪ AQ или CP, который падаетЪ тогда по другую сторону центра вЪ разсужденіи точки F, увеличивается дотолѣ, пока дуга AB сдѣлается 180°; тогда синусЪ ея нуль, а косинусЪ равенЪ радіусу. Видно также, что синусЪ AP, и косинусЪ CP дуги AB или угла ACB, который больше 90°, принадлежатЪ и дугѣ AH или углу ACH меньшему 90° и супплементу перьваго; такЪ что дабы имѣть синусЪ и косинусЪ тупаго угла, должно взять синусЪ и косинусЪ его супплемента. Но должно примѣтить, что косинусЪ падаетЪ со стороны противулежащей той, на которую бы онЪ палЪ, естьли бы дуга AB или уголЪ ACB былЪ меньше 90°. фиг. 143

ВЪ разсужденіи тангенса, понеже онЪ опредѣляется (269) встрѣчею перпендикуляра BD сЪ продолженнымЪ радіусомЪ CA, явствуетЪ, что когда дуга AB больше 90°, онЪ бываетЪ BD; но возставивЪ перпендикулярЪ HJ, можно видѣть, что треугольникЪ CBD равенЪ треугольнику CHJ; и что посему BD равна HJ. фиг. 142. фиг. 143.

276. И такЪ тангенсЪ дуги или угла большаго 90°, есть тотЪ же, что и тангенсЪ супплемента сея дуги. Вся разность состоитЪ вЪ томЪ, что онЪ падаетЪ ниже радіуса BC. ЧтожЪ касается до котангенса EF, онЪ есть тотЪ же что и котангенсЪ супплемента, и падаетЪ со стороны противулежащей той, на которую бы онЪ палЪ, естьли бы дуга AB, или уголЪ ACB былЪ меньше 90°. ЯвствуетЪ также, что тангенсЪ 180° есть нуль, а котангенсЪ безконеченЪ.

277. ПредположивЪ сіи понятія, представимЪ, что четверть окружности BF раздѣлена на дуги равныя одной минутѣ, т. е. на 5400 равныхЪ фиг. 142

частей, и что отЪ каждой точки раздѣленія опущены перпендикулярныя прямыя, или синусы, какЪ AP на радіусЪ BC; представимЪ также, что сей радіусЪ BC раздѣленЪ на весьма многія равныя части, на 100000; на примѣрЪ: каждая изЪ перпендикулярныхЪ прямыхЪ будетЪ содержать нѣкоторое число сихЪ частей радіуса: и такЪ естьли бы можно было какимЪ нибудь образомЪ опредѣлить число частей каждаго изЪ сихЪ перпендикуляровЪ, то явствуетЪ, что сіи линѣи могли бы послужить кЪ опредѣленію величины угловЪ, такЪ что естьли бы написавЪ по порядку вЪ одномЪ столбцѣ всѣ минуты, начиная отЪ нуля до 90°, написано было вЪ другомЪ столбцѣ на сторонѣ и насупротивЪ каждой минуты, число частей соотвѣтствующаго перпендикуляра; можно бы было помощію сей таблицы узнать число градусовЪ угла, коего число частей перпендикуляра или синуса извѣстно; и *обратно, зная число градусовЪ и частей градуса угла, можно бы было узнать число частей* его синуса. Сія таблица имѣла бы таковую пользу не только для всѣхЪ дугЪ или угловЪ, коихЪ радіусЪ имѣлЪ бы тоже число частей, что и тотЪ, на который сочинена таблица, но еще и для всякой другой дуги или угла имѣющаго

Фиг. 144. извѣстный радіусЪ; на примѣрЪ да будетЪ уголЪ DCG имѣющій сторону или радіусЪ CD 8 футЪ, а перпендикулярЪ DE вЪ 3 фута; да будетЪ CA радіусЪ, по которому вычислены таблицы. Ежели представить дугу AB и перпендикулярЪ AP, то сей перпендикулярЪ будетЪ синусЪ таблицЪ; и такЪ я удобно могу найти, изЪ коликихЪ частей состоитЪ сія перпендикулярная прямая. Ибо какЪ треугольники CDE, CAP подобны, (понеже DE и AP суть паралельны); то будетЪ (109) CD:DE::CA:AP, т. е. 8ф:3ф::100000:AP; и

такъ я найду (Ариѳ. 179), что AP равна 37500; слѣдовательно остается мнѣ сыскать сїе число въ таблицѣ между синусами, гдѣ напротивъ его увижу число градусовъ и минутъ угла DCG или DCE.

Обратно, ежели бы дано было число градусовъ и минутъ угла DCG и его радїусъ CD, можно бы также опредѣлить величину перпендикулярной DE; понеже, зная число градусовъ и минутъ сего угла, можно найти въ таблицѣ и число частей перпендикуляра или синуса AP, соотвѣтствующаго сему числу градусовъ; и тогда по свойству подобныхъ треугольниковъ CAP, CDE, будетъ сїя пропорцїя CA : AP :: CD : DE, по коей удобно вычислить DE, ибо три первые члена CA, AP и CD извѣстны, а именно CA и AP изъ таблицъ, а CD дана въ футахъ.

Отсюда явствуетъ, что синусы суть тѣ линѣи, кои, какъ мы выше (268) сказали, могутъ замѣнять углы въ вычисленїи треугольниковъ.

278. Но не одни только синусы къ сему употребляются: въ употребленїи также тангенсы и секансы. Сїи линѣи легко вычислить можно, когда уже одиножды вычислены всѣ синусы. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ CPA, CBD можно взять слѣдующїя пропорцїи: фиг. I

CP : PA :: CB : BD,

и CP : CA :: CB : CD,

то есть (ибо CP равна AQ)

кос. AB : син. AB :: R : тан. AB

и кос. AB : R :: R : сек. AB.

Въ каждой изъ сихъ пропорцїй три первые члена извѣстны, когда извѣстны всѣ синусы; понеже косинусъ какой либо дуги не что иное есть, какъ синусъ комплемента сея дуги: и такъ удобно сыщется (Ариѳ. 179) четвертой членъ

каждой пропорцїи, то есть тангенсы и секансы, а посему также котангенсы и косекансы, которые суть тангенсы и секансы комплементовъ.

279. Впрочемъ двѣ послѣднїя пропорцїи, которыя мы теперь показали, не только для вычисленїя тангенсовъ и секансовъ полезны, но весьма употребительны и во многихъ другихъ случаяхъ, какъ мы увидимъ въ продолженїи; и такъ должно старатся затвердить ихъ. Вторая на примѣръ заключаетъ слѣдующее свойство, на которомъ основано сочиненїе правыхъ картъ: подобно, какъ мы доказали, что кос. ав : R :: R : сек. ав, можно доказать въ разсужденїи всякой другой дуги во, что кос. во : R :: R : сек. во. Сїи двѣ пропорцїи, имѣя среднїе члены тѣже, должны имѣть произведенїя крайнихъ ихъ членовъ равныя (Ариѳ. 178); слѣдовательно можно (Ариѳ. 180) составить изъ крайнихъ членовъ той и другой новую пропорцїю, которая будетъ имѣть крайними членами крайнїе члены одной, а средними крайнїе другой, такъ что будетъ кос. ав : кос. во :: сек. во : сек. ав. Откуду можно заключить, что косинусы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержанїи ихъ секансовъ.

280. Вотъ еще другая пропорцїя полезная во многихъ случаяхъ, изъ которой также можно вывести, что тангенсы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержанїи ихъ котангенсовъ: треугольники свd, сfе суть подобные, ибо, сверхъ прямаго угла при точкѣ в и при точкѣ f, уголъ dсв равенъ углу сеf, поелику св и еf суть параллельныя; по чему будетъ вd : св :: сf : fе, т. е. тан. ав : R :: R : кот. ав. Можно доказать подобнымъ образомъ, что тан. во : R :: R : кот. во; чего ради тан. ав : тан. во :: кот. во : кот. ав.

Книги, заключающія величины всѣхъ упомянутыхъ линѣй, называются таблицы синуснусовъ: онѣ содержатъ обыкновенно не токмо числительныя величины всѣхъ сихъ линѣй, но и логариѳмы ихъ, которые употребляются всегда, когда возможно, вмѣсто числительныхъ величинъ. Сіижъ самыя таблицы заключаютъ логариѳмы натуральныхъ чиселъ, которыя мы показали въ Ариѳметикѣ.

Прежде нежели покажемъ употребленіе сихъ таблицъ для рѣшенія треугольниковъ, остается намъ поговорить о составленіи ихъ: т. е. о способѣ, по которому вычислены, или можно вычислить синусы, и проч. Мы тѣмъ охотнѣе къ сему приступимъ, что предложенія, которыя мы имѣемъ показать на сей предлогъ, и на другіе намъ послужатъ.

281. Дабы найти косинусъ дуги, которой синусъ извѣстенъ, должно отнять квадратъ *синуса отъ квадрата радіуса, и извлечь квадратный корень изъ остатка.* Ибо косинусъ AQ равенъ прямой PC, которая есть одна изъ сторонъ при прямомъ углѣ въ прямоугольномъ треугольникѣ APC, коего ипотенуза AC и сторона AP въ семъ случаѣ извѣстны (166). фиг. 142.

И такъ естьли бы потребно было найти косинусъ 30°; то, какъ мы видѣли (271), что синусъ 30° есть половина радіуса, которой мы положимъ здѣсь изъ 100000 частей, сей синусъ былъ бы 50000; отнявъ его квадратъ 2500000000 отъ 10000000000 квадрата радіуса, остается 7500000000, коего квадратный корень 86603 есть косинусъ 30° или синусъ 60°.

282. Дабы, зная синусъ дуги AB, найти синусъ половины ея, надлежитъ вопервыхъ вычислить косинусъ сей первой дуги, и отнять фиг. 145

его отъ радiуса, что покажетъ синусъ версусъ BP; потомъ взявъ квадратъ изъ BP, сложить оный съ квадратомъ синуса AP; сумма (166) будетъ квадратъ хорды AB; извлекши квадратный корень изъ сей суммы будетъ найдена AB, которой половина есть BJ синусъ дуги BD половины AB (270).

283. Зная синусъ BJ дуги BD; дабы найти синусъ AP дуги ADB, которая есть двукратна сей дуги, должно вычислить косинусъ CJ дуги BD, и сдѣлать сiю пропорцiю, R : кос. BD :: 2 син. BD : син. ADB, въ которой, поелику перьвые три члена извѣстны въ семъ случаѣ, четвертый легко вычисленiемъ найдется.

Сiя пропорцiя основана на томъ, что два треугольника CBJ и BAP суть подобны: понеже сверьхъ прямаго угла въ P и въ J они имѣютъ еще уголъ B общiй. И такъ CB : CJ :: AB : AP, но CJ (270) есть косинусъ дуги BD, а AB двукратная BJ, есть синусъ дуги BD; AP синусъ дуги ADB; и CB радiусъ; чего ради R : кос. BD :: 2 син. DB : син. ADB.

фиг. 146. 284. Дабы, зная синусы двухъ дугъ AB, AC, найти синусъ ихъ суммы, или ихъ разности, должно, вычисливъ (281) косинусы сихъ самыхъ дугъ, умножить синусъ перьвыя на косинусъ вторыя, и синусъ вторыя на косинусъ перьвыя. Сумма сихъ двухъ произведенiй, раздѣленная на радiусъ, будетъ синусъ суммы сихъ дугъ. Разность же сихъ самыхъ произведенiй, раздѣленная на радiусъ, будетъ синусъ разности сихъ двухъ дугъ.

Сдѣлай дугу AD равную дугѣ AC, проведи хорду CD и радiусъ LA, который раздѣлитъ сiю хорду по поламъ на точкѣ J; отъ точекъ C, A, J и D опусти перпендикулярныя CK, AG, JH, DF на BL; наконецъ отъ точекъ J и D проведи JM и DN

паралельныя прямой BL. Понеже CD раздѣлена по поламъ на точкѣ J, то—и CN будетъ также разсѣчена по поламъ на точкѣ M (102). Примѣтимъ, что CK, которая есть синусъ дуги BC, суммы двухъ дугъ, состоитъ изъ KM и MC, или изъ JH и MC; DF, которая есть синусъ дуги BD, разности двухъ дугъ, равна прямой KN, сія же равна прямой KM безъ MN, т. е. JH безъ CM. И такъ, чтобъ найти синусъ суммы, должно сложить величину прямой JH съ величиною прямой MC; а чтобы найти синусъ разности, надлежитъ отнять сію отъ оной.

Подобные треугольники LAG, LJH даютъ LA : LJ :: AG : JH, т. е. R : кос. AC :: син. AB : JH. Слѣдовательно (Ариф. 179) JH равна $\frac{\text{син. AB} \times \text{кос. AC}}{\text{R}}$.

Подобные же треугольники LAG и CJM (ибо по сочиненію имѣютъ стороны взаимно перпендикулярныя) даютъ (112) LA : LG :: CJ : MC, или R : кос. AB :: син. AC : MC. Слѣдовательно MC равна $\frac{\text{син. AC} \times \text{кос. AB}}{\text{R}}$; чего ради должно сложить $\frac{\text{син. AC} \times \text{кос. AB}}{\text{R}}$ съ $\frac{\text{син. AB} \times \text{кос. AC}}{\text{R}}$, дабы найти синусъ суммы; и напротивъ того отнять первое количество отъ втораго, что бы получить синусъ разности.

285. Дабы найти косинусъ суммы или разности двухъ дугъ, которыхъ извѣстны синусы, надлежитъ, вычисливъ (281) косинусы каждой изъ оныхъ, умножить ихъ взаимно; и также умножить оба синуса; потомъ отнять второе произведеніе отъ перьваго, и раздѣля остатокъ на радіусъ, будемъ имѣть косинусъ суммы двухъ дугъ. Напротивъ, чтобъ найти косинусъ разности, надлежитъ сложить два произведенія, и сумму ихъ раздѣлить на радіусъ.

Ибо, поелику DC разсѣчена по поламъ въ точкѣ J, FK будетъ также разсѣчена по поламъ въ точкѣ H; слѣдовательно прямая LK, косинусъ суммы, равна прямой LH безъ HK, или LH безъ JM; а LF косинусъ разности равна LH вмѣстѣ съ HF, или LH съ HK, или наконецъ LH съ JM. Посмотримъ же какія суть величины прямыхъ LH и JM.

Въ подобныхъ треугольникахъ LGA, LHJ имѣемъ LA : LJ :: LG : LH. т. е. R : кос. AC :: кос. AB : LH; слѣдовательно LH равна $\frac{\text{кос. AC} \times \text{кос. AB}}{R}$.

Подобные треугольники LAG, CJM дають LA : AG :: CJ : JM, то есть R : син. AB :: син. AC : JM; слѣдовательно JM равна $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. AC}}{R}$; и такъ, чтобы найти косинусъ суммы, должно отнять $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. AC}}{R}$ отъ $\frac{\text{кос. AB} \times \text{кос. AC}}{R}$; напротивъ же того должно сіи количества сложить, чтобы найти косинусъ разности.

Фиг. 147. 286. *Сумма синусовъ двухъ дугъ AB, AC, содержится къ разности сихъ синусовъ, такъ какъ тангенсъ полусуммы сихъ двухъ дугъ, содержится къ тангенсу ихъ полуразности; то есть, син. AB + син. AC : син. AB — син. AC :: тан. $\frac{AB+AC}{2}$: тан. $\frac{AB-AC}{2}$.*

Проведя діаметръ AM, опиши дугу AD равную дугѣ AB; и соединя хорду BD, которая будетъ перпендикулярна къ AM, чрезъ точку C проведи CP перпендикулярную, и CF паралельную прямой AM; отъ точки F проведи хорды FB и FD, и радіусомъ FG равнымъ радіусу круга BAD, опиши дугу JGK, встрѣчающую CF на точкѣ G, и отъ сей точки G возставь прямую HL перпендикулярную къ CF; линѣи GH и GL суть тангенсы угловъ

GFH и GFL или угловъ CFB и CFD, кои имѣя свои верщины на окружности, измѣряются половинами дугъ CB, CD, на которыхъ они стоятъ (63), т. е. половиною разности BC, и половиною суммы CD двухъ дугъ AB, AC. И такъ GL и GH суть тангенсы полусуммы и полуразности сихъ самыхъ дугъ.

Положивъ сіе, явствуетъ, что, поелику DS равна BS, будетъ DE = BS + SE или BS + CP, т. е. равна суммѣ синусовъ дугъ AB, AC: также BE = BS − ES или BS − CP, т. е. равна разности синусовъ сихъ же самыхъ дугъ. Но понеже BD и HL суть паралельны, имѣемъ (115) DE : BE :: LG : GH; чего ради син. AB + син. AC : син. AB − син. AC :: тан. $\frac{AB + AC}{2}$: тан. $\frac{AB - AC}{2}$.

287. Отсюда явствуетъ, что сумма косинусовъ двухъ дугъ, содержится къ разности сихъ косинусовъ, такъ какъ котангенсъ полусуммы сихъ дугъ, къ тангенсу полуразности ихъ.

Ибо: понеже косинусы суть синусы комплементовъ, слѣдуетъ изъ предъидущей пропорціи, что сумма косинусовъ содержится къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ полусуммы комплементовъ, къ тангенсу полуразности сихъ комплементовъ. Но полусумма комплементовъ двухъ дугъ есть комплементъ полусуммы, а полуразность комплементовъ есть тоже, что и полуразность дугъ; слѣдовательно, и проч.

288. Предложенныя три начала (271, 282, 284) достаточны подать свѣденіе о сочиненіи таблицы синусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, зная синусъ 30° по помянутымъ способамъ, (271 и 282) можно найти синусъ 15°, и постепенно синусы 7°. 30′; 3°. 45′; 1°. 52′. 30″; 0°. 56′. 15″; 0°. 28′. 7″ 30‴; 0°. 14′. 3″. 45‴; 0°. 7′. 1″. 52‴. 30ⁱᵛ.

Положивъ сіе, должно замѣтить, что весьма малыя дуги нечувствительно разнствуютъ отъ своихъ синусовъ, слѣдовательно они почти пропорціональны симъ синусамъ; и такъ, чтобъ найти синусъ 1′, должно послать сію пропорцію: дуга 0°. 7′. 1″. 52‴. 30⁗ содержится къ дугѣ 0°. 1′, такъ какъ синусъ первой дуги, къ синусу дуги 1′.

Ежели въ семъ вычисленіи радіусъ полагается изъ 100000 частей только, то надлежитъ вычислить синусы упомянутыхъ дугъ съ тремя десятичными, дабы можно было оттуда заключить о послѣдующихъ, не ошибаясь болѣе, какъ единицею; послѣ чего удобно будетъ приступить къ другимъ такимъ образомъ:

Начиная отъ 1′ до 3°, 0′, довольно будетъ умножать синусъ 1′ послѣдовательно на 2, 3, 4, 5 и проч. дабы имѣть синусы 2′, 3′, и проч. не ошибаясь болѣе, какъ единицею.

Дабы вычислить синусы дугъ большихъ 3°, 0′; должно прибѣгнуть къ тому, что сказано (284); но много сократится работа, естьли по сему началу вычислить синусы отъ градусовъ до градусовъ только. Чтожъ касается до минутъ, можно сему удовлетворить, взявъ разность синусовъ двухъ послѣдственныхъ градусовъ, и сдѣлавъ сію пропорцію: 60′ содержатся къ числу искомыхъ минутъ, такъ какъ разность синусовъ двухъ ближайшихъ градусовъ къ четвертому числу, которое приложивъ къ меньшему изъ двухъ синусовъ, найдется синусъ числа градусовъ и минутъ искомыхъ. На прим. сыскавъ, что синусы 8° и 9° суть 13917 и 15643, естьли бы я пожелалъ найти синусъ 8°. 17′, то взялъ бы разность 1726 сихъ синусовъ, и вычислилъ четвертый членъ пропорціи, коея три первые члена суть 60′ : 17′ :: 1726:

Сей четвертый членъ, который найдется почти 489, будучи приложенъ къ 13917, получаемъ 14406 для синуса 8°. 17', такъ какъ онъ есть въ таблицахъ, ошибаясь развѣ единицею.

Причина сей пропорцiи основывается на томъ, что когда дуга KL мала, какъ на прим. въ 1°; то разности LM, JU синусовъ LF, JH почти пропорцiональны разностямъ KL, KJ соотвѣтствующихъ дугъ AL, AJ; ибо треугольники KML, KUJ, которые можно почесть за прямолинѣйные, суть подобны. фиг. 129

289. Сей способъ долженъ быть употребляемъ только до 87°. Ибо преступивъ сей предѣлъ не можно принять iu за разность синусовъ PB, QX; понеже количество их сколь ни мало имѣетъ чувствительное содержанiе къ iu, и тѣмъ большее, чемъ ближе дуга AB къ 90°. Въ семъ случаѣ должно припомнить, что (170) линѣи DE, Dt, которыя суть разности радiуса и синусовъ PB, QX, пропорцiональны квадратамъ хордъ DB и DX, или (понеже дуги DB и DX весьма малы) квадратамъ дугъ DB и DX; чего ради вычисливъ синусъ 87°, должно взять разность между имъ и радiусомъ 100000; и для сысканiя синуса всякой другой дуги между 87° и 90°, должно послать сiю пропорцiю: квадратъ 3° или 180' содержится къ квадрату числа минутъ комплемента искомой дуги, такъ какъ разность между радiусомъ и синусомъ 87° къ четвертому члену, который будетъ Dt, и который отнявъ отъ радiуса, получимъ Ct или QX синусъ искомой дуги. На примѣръ, сыскавъ, что синусъ 87° есть 99863, естьли я пожелаю имѣть синусъ дуги 88°. 24', которой комплементъ есть 1°. 36' или 96'; то сдѣлаю сiю пропорцiю: $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 : Dt$, по которой найду, что Dt фиг. 14[...]

составляетъ почти 39; отнявъ же отъ радїуса 100000, получу 99961 для синуса 88°. 24′, такъ какъ онъ и дѣйствительно стоитъ въ таблицахъ.

290. Вычисливъ такимъ образомъ синусы, можно легко найти тангенсы и секансы, какъ о томъ сказано (278).

291. Вычисливъ синусы, должно вычислить ихъ логариѳмы, такъ же какъ вычисляютъ логариѳмы чиселъ. Однако примѣтимъ, что естьли бы взята была изъ таблицъ числительная величина одного изъ синусовъ, ради вычисленїя логариѳма его по правилу показанному (Ариѳ. 239), то сысканной логариѳмъ не былъ бы точно тотъ, которой находится въ таблицѣ логариѳмовъ синусовъ. Ибо синусы таблицъ вычислены были первоначально, полагая радїусъ изъ 10000000000 частей; но какъ обыкновенныя вычисленїя не требуютъ такой точности, то отняли въ настоящихъ таблицахъ 5 послѣднихъ знаковъ отъ числительныхъ величинъ синусовъ, тангенсовъ и проч. такъ что сїи величины, каковы онѣ дѣйствительно находятся въ таблицахъ, суть только приближенныя; но погрѣшность не простирается далѣе единицы на 100000. Что же принадлежитъ до логариѳмовъ синусовъ, тангенсовъ и пр. то оставили ихъ таковыми, каковы они были вычислены для радїуса состоящаго изъ 10000000000 частей; и для сей то причины характеристика ихъ больше нежели какую полагаетъ числительная величина соотвѣтствующаго синуса или соотвѣтствующаго тангенса; такъ что когда употребляются логариѳмы синусовъ, тангенсовъ и проч. тогда полагаемъ, что радїусъ состоитъ изъ 10000000000 частей; когда же употребляются числительныя величины синусовъ и тангенсовъ, принимаемъ радїусъ изъ 100000 частей только.

Что касается до логариѳмовъ тангенсовъ и секансовъ, оные находятся помощїю простаго сложенїя и вычитанїя, когда уже найдены логариѳмы синусовъ. Сїе слѣдуетъ изъ того, что сказано (278) и (Ариѳ. 232).

292. Хотя обыкновенныя таблицы показываютъ синусы, тангенсы и проч. только для градусовъ и минутъ; однако можно по имъ найти величины сихъ самыхъ линѣй для градусовъ, минутъ и секундъ, слѣдуя точно тому, что мы показали касательно однихъ градусовъ и минутъ. Но какъ чаще употребляются логариѳмы сихъ линѣй вмѣсто самыхъ линѣй, то мы остановимся нѣсколько на семъ послѣднемъ предметѣ.

Положивъ, что имѣемъ логариѳмы синусовъ и тангенсовъ на каждую минуту; когда потребуется найти логариѳмъ синуса какого либо извѣстнаго числа градусовъ, минутъ и секундъ, должно взять логариѳмъ синуса числа градусовъ и минутъ; должно также взять разность двухъ ближайшихъ логариѳмовъ, которая напечатана на сторонѣ; (ежели же въ таблицахъ логариѳмовъ не напечатаны логариѳмическїя разности, то можно ихъ находить, вычитая меньшей логариѳмъ изъ большаго къ ему ближайшаго); и потомъ сдѣлать сїю пропорцїю: 60″ содержатся къ данному числу секундъ, такъ какъ разность логариѳмовъ взятая въ таблицахъ къ четвертому члену, который приложивъ къ логариѳму синуса градусовъ и минутъ, получимъ логариѳмъ синуса даннаго числа градусовъ, минутъ и секундъ.

Естьлибъ, напротивъ того, данъ былъ логариѳмъ синуса несоотвѣтствующїй точному числу градусовъ и минутъ; то, дабы найти секунды, надлежало бы составить сїю пропорцїю: разность двухъ логариѳмовъ, между коими на-

ходится данный логариѳмъ, содержится къ разности сего логариѳма, и логариѳма, который его меньше и ближайшій къ ему въ таблицѣ, такъ какъ 60″ къ четвертому члену; сей членъ покажетъ число секундъ, которыя должно приложить къ числу градусовъ и минутъ дуги находящейся въ таблицѣ, непосредственно меньше искомой.

Должно слѣдовать сему правилу, доколѣ дуга не меньше 3°; когда же она будетъ меньше, тогда можно поступить такъ какъ въ семъ примѣрѣ. Положимъ, что требуется синусъ 1°, 55′, 48″; должно сдѣлать сію пропорцію: 1°, 55′ : 1°, 55′, 48″ :: синусъ 1°, 55′ къ четвертому члену, который (ибо малыя дуги пропорціональны ихъ синусамъ) будетъ безъ чувствительной погрѣшности синусъ 1°, 55′, 48′. Для удобнѣйшаго вычисленія должно привесть два первые члена въ секунды; потомъ взявъ въ таблицѣ логариѳмъ синуса 1°, 55′, который есть третій членъ, должно къ нему приложить логариѳмъ 1°, 55′, 48″ приведенныхъ въ секунды; наконецъ отъ суммы отнять логариѳмъ 1°, 55′ приведенныхъ въ секунды; остатокъ будетъ (Ариѳ. 232) логариѳмъ четвертаго члена, то есть логариѳмъ искомый.

Обратно, чтобъ найти число градусовъ, минутъ и секундъ дуги меньшей 3°, и которой данъ синусъ, надлежитъ приискать въ таблицахъ число градусовъ и минутъ; потомъ составить сію пропорцію: синусъ приисканнаго числа градусовъ и минутъ содержится къ данному синусу, такъ какъ сіе число градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды, къ цѣлому числу секундъ искомой дуги. И такъ по логарифмамъ дѣйствіе будетъ приведено къ тому, чтобъ взять разность между логариѳмомъ

предлагаемаго синуса, и логариѳмомъ синуса числа градусовъ и минутъ, который непосредственно меньше даннаго, и придать сїю разность къ логариѳму сего числа градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды; сумма будетъ логариѳмъ числа секундъ, которымъ равна искомая дуга. На примѣръ, ежели данъ будетъ 8, 6233427 логариѳмъ синуса дуги; я вопервыхъ нахожу въ таблицахъ, что самое ближайшее число есть 2°, 24′, и что разность между логариѳмами предлагаемаго синуса и синуса сей послѣдней дуги есть 0, 0013811; потомъ складываю сїю разность съ 3, 9365137 логариѳмомъ 2°, 24′ приведенныхъ въ секунды, сумма 3, 9378948 соотвѣтствуетъ въ таблицахъ логариѳмовъ числу 8667, которое являетъ число секундъ искомой дуги; посему искомая дуга будетъ 2°, 24′, 27″. Сїе правило есть обратное предъидущаго.

Что принадлежитъ до логариѳмовъ тангенсовъ, должно слѣдовать тѣмъ же правиламъ, перемѣняя слово синусъ на тангенсъ; надлежитъ только исключить дуги находящїяся между 87° и 90°, для коихъ прилагаемъ слѣдующее правило. Вычисли логариѳмъ тангенса комплемента по предписанному правилу для тангенсовъ, и отними сей логариѳмъ отъ двукратнаго логариѳма радїуса. Дѣйствительно въ силу сказаннаго (280) тангенсъ есть четвертый членъ пропорцїи, коея перьвые три члена суть, котангенсъ, радїусъ и радїусъ. Естьли бы напротивъ того данъ былъ логариѳмъ тангенса дуги, которая находясь между 87° и 90° долженствовала бы имѣть секунды; то отнявъ сей логариѳмъ отъ двукратнаго логариѳма радїуса, имѣли бы логариѳмъ тангенса комплемента дуги, которая, поелику необходимо находится между 0° и 3°,

удобно бы была опредѣлена изъ предъидущаго; взявъ же комплементъ дуги тако найденной, получили бы и искомую дугу.

293. Понеже синусъ дуги есть половина хорды двукратныя дуги, то естьли бы по предложенному началу (282) дошли до синуса дуги самой ближайшей къ 1', и удвоивъ сей синусъ, потомъ увеличили его во столько кратъ, сколько дуга стягаемая хордою равною двукратному синусу содержится къ полуокружности, явствуетъ, что было бы найдено число весьма близкое къ длинѣ полуокружности, но нѣсколько меньшее; естьли бы также по данной пропорціи (278) вычислили тангенсъ той же дуги, и удвоивъ его увеличили потомъ во столько кратъ, сколько двукратная сей дуги содержится къ полуокружности; то получили бы число крайне близкое къ полуокружности, но нѣсколько большее; и такъ помощію вычисленія синусовъ можно близко дойти до содержанія діаметра къ окружности. Мы не остановимся на семъ вычисленіи, ибо въ другомъ мѣстѣ дадимъ исправнѣйшій способъ. Какъ бы ни было, можно найти симъ образомъ, что, когда радіусъ положимъ 1000000000, полуокружности будетъ между 3141592636 и 3141592635. Отсюда заключимъ, что когда радіусъ 1, то 180° полуокружности равны 3, 141592635; градусъ равенъ 0, 0174532925; минута равна 0, 000290888208; и такъ далѣе. Мы приводимъ сіи числа здѣсь для того, что они часто могутъ быть полезны. На примѣръ, желательно ли знать, какое пространство занимаетъ минута градуса на октанѣ, которымъ наблюдаютъ высоты на морѣ, когда радіусъ сего октана полагается 20 дюймовъ. По строенію сего инструмента дуга 45° представляетъ 90°; и такъ разстояніе

между двумя послѣдственными дѣленіями есть пространство занимаемое градусомъ, въ кругѣ котораго радіусъ вдвое меньше, то есть 10 дюймовъ; чего ради минута на такомъ инструментѣ соотвѣтствуетъ только пространству, которое бы она занимала на окружности имѣющей радіусъ въ 10 дюймовъ или 120 линѣй. Умножимъ 120 на 0, 00029 величину минуты, и взявъ только пять первыхъ знаковъ, будемъ имѣть 0, 03480 или 0, 0348, т. е. $\frac{348}{1000}$ линѣи, или около $\frac{1}{29}$ линѣи. Отсюда явствуетъ, что нельзя отвѣчать за минуту, наблюдая симъ инструментомъ. Мы будемъ имѣть случай говорить о семъ въ другомъ мѣстѣ.

О рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ.

294. Мы выше сего сказали (267), что для вычисленія или рѣшенія треугольника, надлежитъ знать три изъ шести вещей, которыя составляютъ оный, и что между тремя извѣстными частями, должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Понеже прямый уголъ есть извѣстный уголъ, то довольно въ прямоугольномъ треугольникѣ знать двѣ вещи, кромѣ прямаго угла, изъ которыхъ должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Примѣтимъ еще, что послику два острые угла прямоугольнаго треугольника равны купно одному прямому углу, то когда одинъ изъ нихъ извѣстенъ, извѣстенъ и другой.

Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ заключаетъ четыре случая: или двѣ извѣстныя вещи, суть одинъ изъ двухъ острыхъ угловъ, и одна сторона около прямаго угла; или одинъ острый уголъ и ипотенуза; или одна сторона

около прямаго угла и ипотенуза; или наконецъ двѣ стороны около прямаго угла. Сїи четыре случая всегда найдутъ свое рѣшенїе въ одной изъ двухъ слѣдующихъ пропорцїй.

295. 1 я. Радїусъ таблицъ, содержится къ синусу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ ипотенуза, къ сторонѣ противулежащей сему углу.

296. 2 я. Радїусъ таблицъ, содержится къ тангенсу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ сторона около прямаго угла, прилежащая сему углу, къ сторонѣ ему противулежащей.

Для доказательства перьвой изъ сихъ двухъ фиг. 144. пропорцїй должно только представить, что въ прямоугольномъ треугольникѣ CED, CA часть ипотенузы есть радїусъ таблицъ; потомъ проведя дугу AB, перпендикуляръ AP будетъ синусъ угла ACB или DCE; и такъ, понеже AP и DE паралельны, будетъ въ подобныхъ треугольникахъ CAP и CDE, CA:AP::CD:DE, то есть R: син. DCE::CD:DE, что и составляетъ перьвую пропорцїю.

Такимъ же образомъ докажется, что R: син. CDE::CD:CE.

Что принадлежитъ до второй пропорцїи, фиг. 149. должно представить въ прямоугольномъ треугольникѣ CEF, что часть CA стороны CE, есть радїусъ таблицъ; тогда написавъ дугу AB, перпендикуляръ AD воставленной изъ точки A на AC, будетъ тангенсъ угла C или FCE; и такъ въ подобныхъ треугольникахъ CAD, CEF, будетъ CA:AD::CE:EF, то есть R: тан. FCE::CE:EF, что составляетъ вторую изъ двухъ помянутыхъ пропорцїй.

Подобно докажется, что R: тан. CFE:: EF:EC.

297. Въ слѣдующихъ приложеніяхъ мы всегда будемъ употреблять логарифмы синусовъ, тангенсовъ и проч. вмѣсто самыхъ синусовъ, тангенсовъ и проч. и чтобъ приучить начинающихъ къ употребленію ариѳметическихъ дополненій, мы употребимъ оныя во всѣхъ вычисленіяхъ, выключая тѣ случаи, въ которыхъ логарифмъ вычитаемый есть логарифмъ радіуса, который вычитать легко, ибо характеристика его 10. Но прежде нежели приступимъ къ вычисленію треугольниковъ, дадимъ здѣсь краткое понятіе о ариѳметическихъ дополненіяхъ, и покажемъ ихъ употребленіе.

Ариѳметическое дополненіе какого либо числа берется, вычитая изъ 9ти каждую цифру сего числа, выключая послѣднюю на правой рукѣ, которая вычитается изъ десяти. И такъ ариѳметическое дополненіе какого нибудь числа можетъ быть взято глядя только на его цифры.

Ариѳметическія дополненія служатъ къ *обращенію вычитаній въ сложенія*. И такъ *ежели отъ 78549 я желаю отнять 65647*, то могу вмѣсто сего дѣйствія сложить 78549 съ 34353, что есть ариѳметическое дополненіе числа 65647; потомъ остается только отъ суммы на перьвомъ мѣстѣ съ лѣвой руки отнять единицу; а ежели бы приложены были два ариѳметическія дополненія, должно бы отнять двѣ единицы, и такъ далѣе. Въ семъ случаѣ сумма будетъ 112902, отъ которой отнявъ единицу на перьвомъ мѣстѣ остается 12902; сей остатокъ есть точно тотъ же, который произойдетъ, естьли изъ 78549 вычесть 65647 по обыкновенному правилу.

Причину сего удобно видѣть можно замѣтя, что ариѳметическое дополненіе числа 65647

не что иное есть, какъ 100000 безъ 65647; и такъ прилагая ариѳметическое дополненіе прилагается 100000 и вычитается 65647; почему выводъ содержитъ 100000 лишку, то есть перьвая его цифра единицею больше.

И понеже (Ариѳ. 232), дабы помощію логариѳмъ сдѣлать тройное правило, должно сложить логариѳмы двухъ среднихъ, и вычесть логариѳмъ перьваго члена; можно по силѣ предъидущаго замѣчанія, взять сумму логариѳмовъ двухъ среднихъ и ариѳметическаго дополненія логариѳма перьваго члена; и потомъ перьвую цыфру съ лѣвой руки того, что выдетъ, уменьшить единицею.

Обратимся теперь къ приложенію двухъ доказанныхъ пропорцій къ четыремъ случаямъ, о которыхъ мы сказали.

Примѣръ 1. Положимъ, что надобно опредѣлить высоту AC какого либо зданія, мѣрами взятыми на землѣ.

фиг. 150. *Должно отойти отъ сего зданія на разстояніе* CD *такое, чтобъ уголъ заключающійся* между двумя линѣями мысленно проведенными отъ точки D къ основанію и къ вершинѣ зданія, не былъ ни весьма острый, ниже весьма близкій къ 90°. Измѣривъ разстояніе CD, должно утвердить въ точкѣ D ножку графометра, и уставить сей инструментъ такъ, чтобъ плоскость его была вертикальна и направлена къ оси AC башни, а неподвижный діаметръ не былъ бы горизонталенъ; что можно сдѣлать помощію малой тяжести повѣшенной на нить прикрѣпленную къ центру. Сія нить должна тогда касать край инструмента и соотвѣтствовать 90°. Потомъ движимый діаметръ должно двигать, доколѣ сквозь мишени его

будетъ видна а вершина зданія; тогда должно смотрѣть на инструментѣ число градусовъ угла fec, которое есть тоже, что и угла aeb противулежащаго ему накрестъ.

Положивъ сіе, поелику ac высота зданія перпендикулярна къ горизонту, будетъ она перпендикулярна и къ be; чего ради есть прямоугольный треугольникъ abe, въ которомъ, сверхъ прямаго угла, извѣстны сторона be равная измѣренной cd, и уголъ aeb; а ищется ab; и такъ видно, что три извѣстныя вещи, и искомая суть члены пропорціи (296); почему, дабы найти ab, должно составить сію пропорцію: r: тан. aeb :: be: ab. Положимъ на примѣръ, что расстояніе cd или be найдено 132 фута, а уголъ aeb 48°. 54′. будетъ r: тан. 48°. 54′ :: 132 ф: ab; и такъ взявъ въ таблицахъ величину тангенса 48°, 54′, умножа его на 132, и раздѣля потомъ на радіусъ взятый въ таблицахъ, найдется число футъ въ ab, къ которой приложа ed высоту инструмента, получимъ искомую высоту ac.

Но много сократится вычисленіе, употребя вмѣсто сихъ чиселъ логариѳмы ихъ; ибо тогда должно только (Ариѳ. 232) сложить логариѳмы втораго и третьяго членовъ, и вычесть логариѳмъ перьваго; чего ради вычисленіе произойдетъ слѣдующимъ образомъ:

Логар. тан. 48°. 54′ - - -	10. 0593064
Логар. 132 - - - - -	2. 1205739
Сумма - - - - - - -	12. 1798803
Логар. r. - - - - - - -	10. 0000000
Остатокъ или логар. ab - -	2. 1798803,

который соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 151. 32 съ погрѣшностію развѣ на одну сотую. И такъ ab есть 151 футъ и 32 сотыхъ, или 151 футъ 3 дюйма, 10 линѣй.

Замѣтивъ мимоходомъ, что, поелику логариѳмъ радїуса имѣетъ характеристику 10, и нули вмѣсто другихъ его цифръ, можно, когда надобно сложить оный или вычесть, не писать его; но только прибавить или убавить единицу отъ десятковъ характеристики логариѳма, съ которымъ сложить, или изъ котораго вычесть его должно.

фиг. 151. Примѣръ II. Отъ извѣстной точки A перешли 32 мили по линѣи AB паралельной GF, которая означаетъ нордъ-нордъ-остъ: спрашивается, сколько подались къ осту, и сколько къ норду.

Должно мысленно провести чрезъ точки A и B двѣ линѣи AC и BC паралельныя, перьвую линѣи норда и зюйда NS, а вторую линѣи оста и веста OW. Понеже сїи линѣи составляютъ прямой уголъ, то треугольникъ ACB будетъ прямоугольный въ точкѣ C; извѣстна въ семъ треугольникѣ сторона AB равная 32 милямъ, и уголъ CAB, который ради паралельныхъ прямыхъ равенъ углу NDF содержащему (ибо DF означаетъ нордъ-нордъ-остъ) 22°, 30′ или четверть 90°.

И такъ BC найдется изъ сей пропорцїи (295) R: син. 22°. 30′ :: 32 M: BC. А чтобъ найти AC, примѣтимъ, что уголъ B есть комплементъ угла A; чего ради возмемъ сїю пропорцїю (295), R: син. 67°. 30′ :: 32 мили: AC.

Сїи двѣ пропорцїи должно вычислять по логариѳмамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. син. 22° 30′ - - - - -	9. 5828397
логар. 32. - - - - - -	1. 5051500
сумма - - - - - - -	11. 0879897.
логар. R. - - - - - -	1., ...
остатокъ или логар. BC - -	1, 0879897,

который соотвѣтствуетъ 12. 25 съ погрѣшностїю развѣ на одну сотую.

логар. син. 67°. 30′ - - - 9. 9656153
логар. 32. - - - - - - - 1. 5051500

сумма - - - - - - - 11, 4707653
логар. R - - - - - - 1., ...

остатокъ или логар. AC - - 1. 4707653, который соотвѣтствуетъ 29, 56 съ погрѣшностію развѣ на одну сотую.

И такъ подались на 12 миль и 25 сотыхъ или $\frac{1}{4}$ къ осту, и на 29 миль и 56 сотыхъ къ норду.

Число пройденныхъ миль по обѣимъ симъ направленіямъ, служитъ къ опредѣленію мѣста B на поверхности моря, гдѣ находится корабль перешедъ AB; но число миль пройденныхъ къ осту требуетъ поправки, о которой здѣсь говорить невмѣстно; ибо мы здѣсь разсуждаемъ только о первыхъ употребленіяхъ Тригонометріи.

Примѣръ III. Перешли 42 мили по линѣи AB, которой положеніе неизвѣстно; знаемъ только, что подались на 35 миль къ норду: спрашивается, какое было направленіе пути AB, то есть по какому румбу слѣдовали.

Въ семъ случаѣ извѣстны сторона AC около прямаго угла, и ипотенуза; требуется найти уголъ CAB. Понеже два угла A и B составляютъ купно прямый уголъ, то узнаемъ уголъ A, естьли опредѣлимъ уголъ B. А дабы найти сей уголъ, должно послать пропорцію (295) R: син. B :: AB: AC. то есть, R: син. B :: 42: 35; или лучше, написавъ второе содержаніе на мѣсто перьваго, 42: 35 :: R: син. B.

Вычисляя по логарифмамъ имѣемъ:

логар. 35. - - - - 1. 5440680
логар. радіуса - - - 1., ...
ариѳм. дополненіе лог. 42 - 8. 3767507.

сумма или логар. син. угла B 19, 9208187.

который въ таблицахъ соотвѣтствуетъ 56°, 27′. И такъ уголъ A, или направленіе румба есть 33°, 33′.

Примѣръ IV. Перешли по линѣи AB, которой положеніе и величина неизвѣстны: извѣстно только, что подались на 15 миль къ осту и на 35 миль къ норду; вопрошается о направленіи и длинѣ пути.

И такъ даны здѣсь двѣ стороны AC и BC около прямаго угла; требуются углы и ипотенуза. Дабы найти уголъ A, должно составить сію пропорцію (296) AC : BC :: R : тан. A. т. е. 35 : 15 :: R : тан. A.

Вычисляя по логарифмамъ:

логар. 15	- - - - -	1. 1760913
логар. R	- - - - -	1., ...
арифм. дополненіе логар. 35	-	8. 4559320
сумма или логар. тан. A	- -	19. 6320233,

который въ таблицѣ соотвѣтствуетъ 23°, 12′.

Когда уже опредѣленъ уголъ A, то для сысканія AB *можно поступить такъ же какъ* и въ III. примѣрѣ; но не нужно вычислять уголъ A, предложеніе доказанное (164 и 166) для сего довлѣетъ. И такъ взявъ квадратъ 15, который есть 225, и сложивъ его съ 1225, квадратомъ 35, найдешь 1450 для квадрата изъ AB; извлекши же квадратный корень будешь имѣть 38, 08 величину AB, съ погрѣшностію развѣ на одну сотую.

Для той же причины, естьли даны ипотенуза AB и одна изъ сторонъ AC около прямаго угла, а требуется сыскать другую сторону BC, нѣтъ нужды вычислять уголъ A; надлежитъ только вычесть (166) квадратъ извѣстной стороны AC изъ квадрата ипотенузы AB; квадратный корень изъ остатка покажетъ величину стороны BC.

Подобнымъ рѣшенїемъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно опредѣлить, чего недостаетъ, чтобъ лучъ AD, по которому видимъ горизонтъ моря, когда зритель возвышенъ на извѣстное количество AB, выше точки в его поверхности, былъ параллеленъ поверьхности моря. фиг. 152

Понеже лучъ зрѣнїя AD есть въ семъ случаѣ прикасательная прямая, то, ежели мысленно проведенъ будетъ радїусъ CD, уголъ D будетъ прямый (48); извѣстенъ же радїусъ CD земли, который содержитъ 19611500 футъ; и естьли къ радїусу CB 19611500 футъ приложена будетъ высота AB, то сыщется сторона AC. И такъ извѣстны будутъ двѣ вещи сверьхъ прямаго угла, почему можно будетъ вычислить уголъ CAD, коего разность DAO съ прямымъ угломъ будетъ пониженїе луча AD ниже луча AO, параллельнаго поверьхности моря при точкѣ B.

Естьли въ томъ же треугольникѣ ADC вычислена будетъ сторона AD, то сыщется дальнѣйшее расстоянїе, на которое зрѣнїе можетъ простираться, когда глазъ находится на высотѣ AB; но какъ обыкновенныя таблицы не могутъ показать угла CAD и стороны AD съ довольною точностїю, когда AB есть весьма малое количество въ разсужденїи радїуса земли; то вотъ какимъ образомъ можно дополнить сей недостатокъ:

Вообразимъ, что AC продолжена до точки E на окружности; и такъ AE будетъ сѣкущая, а AD касательная, чего ради (129) будетъ AE:AD::AD:AB. И такъ для сысканїя AD должно взять (Ариѳм. 178) среднюю пропорцїональную между AE и AB.

На примѣръ, естьли бы глазъ возвышенъ былъ отъ поверьхности моря на 20 футъ, то AB была бы 20 футъ, а AE двукратная 1961500 футъ вмѣстѣ съ 20, то есть 3922020 футъ; квадратъ изъ AD былъ бы 3922302 0 × 20 или 784460400; слѣдовательно (Ариѳм. 178 и 139) AD была бы 28008 футъ, то есть что глазъ возвышенный на 20 футъ отъ поверьхности морской можетъ видѣть на 28008 футъ или на одну лигу и $\frac{2}{3}$ вокругъ.

Теперь, дабы узнать на сколько лучь зрѣнія AD понизился въ разсужденіи горизонтальнаго AO, примѣтимъ, что, поелику AB крайне мала, линѣя AD непримѣтно разнствуетъ отъ дуги BD; и такъ дуга BD есть 28008 футъ. Но какъ радіусъ равенъ 1961500 футъ, то легко найдется (152), что окружность равна 123222688; и слѣдовательно (153) сыскано будетъ число градусовъ дуги BD по сей пропорціи: 123222688: 28008 :: 360° къ четвертому члену, который будетъ 0°. 4'. 54"; чего ради уголъ ACD, а посему и DAO есть 0°. 4'. 54", когда AB 20 футъ.

О рѣшеніи косоугольныхъ треугольниковъ.

298. Слово косоугольные треугольники употребляется для означенія вообще треугольниковъ не имѣющихъ прямаго угла.

299. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ, синусъ одного угла, содержится къ сторонѣ противулежащей сему углу, такъ какъ синусъ всякаго другаго угла тогожъ треугольника, къ сторонѣ ему противулежащей.

фиг. 153. Ибо ежели представить кругъ описанный около треугольника ABC, и проведя радіусы DA,

DB, DC, описать радїусомъ Db, равнымъ радїусу таблицъ кругъ abc; наконецъ провести хорды ab, bc, ac, соединяющїя точки сѣченїя a, b, c; то удобно можно видѣть, что треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC; ибо линѣи Da, Db будучи равны, суть пропорцїональны линѣямъ DA, DB; и такъ ab (105) паралельна AB. Подобно докажется, что bc паралельна BC, и ac паралельна AC; слѣдовательно (111) AB : ab :: BC : bc; или AB : $\frac{1}{2}$ab :: BC : $\frac{1}{2}$bc; но половина хорды ab есть (270) синусъ ai половины дуги ahb; сїяжъ половина дуги ahb есть мѣра угла acb имѣющего вершину свою на окружности, и равнаго углу ACB; и такъ $\frac{1}{2}$ab есть синусъ угла ACB. Подобно докажется, что и $\frac{1}{2}$bc есть синусъ угла BAC; чего ради AB : син. ACB :: BC : син. BAC.

300. Сїя пропорцїя служитъ къ рѣшенїю треугольника: 1е, когда извѣстны въ немъ два угла и одна сторона; 2е, когда извѣстны двѣ стороны и одинъ уголъ, противулежащїй которой нибудь изъ сихъ сторонъ.

Случай 1. Ежели извѣстны уголъ B, уголъ C и сторона BC, то сыщется и уголъ A, сложивъ два угла B и C, и вычтя ихъ сумму изъ 180°; а что бы найти двѣ стороны AC и AB, должно послать двѣ слѣдующїя пропорцїи: фиг. 65.

син. A : BC :: син. B : AC

син. A : BC :: син. C : AB

Симъ-то образомъ можно вычисленїемъ рѣшить вопросъ, который мы разсматривали (121). На прим. ежели уголъ B примѣченъ 78°. 57′, уголъ C 47°. 34′, а сторона BC 184 фута; то будетъ уголъ A 53°. 29′. Остальныя же двѣ стороны найдутся по симъ двумъ пропорцїямъ:

син. 53°. 29′ : 184 :: син. 78°. 57′ : AC.

син. 53°. 29′ : 184 :: син. 47°. 34′ : AB.

Дѣлая по логариѳмамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. 184 - - - - - -	2. 2648178
логар. син. 78.° 57′ - - - -	9. 9918727
ариѳ. дополненiе лог. син. 53.° 29′	0. 0949148
сумма или лог. ас - - - - -	x2. 3516053
логар. 184 - - - - - -	2. 2648178
лог. син. 47.° 34′ - - - - -	9. 8680934
ариф. дополненiе лог. син. 53.° 29′	0. 0949148
сумма или логар. ав - - -	x2. 2278260

найдется ас 224.7 ф, а ав 169 ф.

фиг. 141. Случай II. Ежели извѣстны сторона ав, сторона вс и уголъ а, то можно опредѣлить уголъ с, вычисливъ его синусъ сею пропорцiею:

вс : син. а :: ав : син. с.

Но примѣтимъ, сходственно тому, что мы сказали прежде (267), что нельзя опредѣлить угла с, развѣ извѣстно, острый или тупый онъ быть долженъ.

На примѣръ, да будетъ ав 68 футъ, вс 37 футъ, а уголъ а 32°, 28′, *пропорцiя будетъ* 37: син. 32°. 28′ :: 68 : син с.

Найдется, что сей синусъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 80°. 36′; но какъ синусъ угла принадлежитъ также и супплементу его, то неизвѣстно, 80°. 36′, или супплементъ его 99°. 24′ взять должно; но когда извѣстно, что уголъ искомый долженъ быть острый, то несомнѣнно въ семъ случаѣ онъ равенъ 80°. 36′, и треугольникъ имѣетъ фигуру авс: естьли же напротивъ того уголъ долженъ быть тупый, то онъ равенъ 99°. 24′, и треугольникъ получитъ фигуру авd.

Прежде нежели покажемъ два предложенiя, дающiя рѣшенiя треугольниковъ въ другихъ случаяхъ, прилично помѣстить здѣсь предложенiе нужное для доказательства сихъ двухъ предложенiй.

301. Ежели извѣстны сумма и разность двухъ количествъ, то придавъ полуразность къ полусуммѣ, будемъ имѣть большее количество; а напротивъ того, отнявъ полуразность отъ полусуммы, получимъ меньшее.

На примѣръ, ежели я знаю, что два количества купно составляютъ 57, и что разнствуютъ оныя 17; то заключаю изъ сего, что сїи два количества суть 37 и 20; приложивъ съ одной стороны половину 17 къ половинѣ 57, а съ другой отнявъ половину 17 отъ половины 57.

Въ самомъ дѣлѣ, поелику сумма содержитъ бо́льшее и ме́ньшее количество, естьли къ сей суммѣ придать разность, то произойдетъ двукратное бо́льшаго; и такъ бо́льшее количество равно половинѣ всего сего, то есть полусуммѣ двухъ количествъ съ полуразностїю ихъ.

Напротивъ того, естьли отъ суммы отнять разность, останется двукратное ме́ньшаго; и такъ ме́ньшее количество равно полуостатку, то есть полусуммѣ безъ полуразности.

302. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ ABC, ежели отъ одного изъ угловъ опущена будетъ перпендикулярная прямая на противулежащую сторону, то всегда будетъ сїя пропорцїя: сторона AC, на которую, или на продолженїе которой падаетъ перпендикуляръ, содержится къ суммѣ AB+BC двухъ прочихъ сторонъ, такъ, какъ разность AB-BC сихъ самыхъ сторонъ, къ разности отсѣковъ AD и DC или къ суммѣ ихъ, судя по тому, какъ перпендикуляръ падаетъ, внутрь, или внѣ треугольника. фиг. 154 и 155.

Точкою B, какъ центромъ и радїусомъ BC, опиши окружность CEHF, и продолжи сторону фиг. 154 и 155.

AB, пока встрѣтится съ сею окружностїю на точкѣ E. Итакъ AE и AC суть двѣ сѣкущїя, проведенныя отъ одной точки взятой внѣ круга, чего ради въ силу того, что сказано (127); будетъ сїя пропорцїя: AC: AE :: AG: AF: но AE равна AB + BE или AB + BC; AG равна AB - BG, или AB - BC, а AF (фиг. 154) равна AD - DF или (52) AD - DC; слѣдовательно AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC. Въ фигурѣ 155, AF равна AD + DF, или AD + DC; и такъ въ семъ случаѣ AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC.

303. Посему, когда извѣстны три стороны треугольника, можно помощїю сего предложенїя сыскать отсѣки сдѣланные перпендикулярною прямою, проведенною отъ одного изъ угловъ на сопротивную сторону. Ибо въ такомъ случаѣ извѣстна (фиг. 154) сумма AC сихъ отсѣковъ, и показанная пропорцїя даетъ ихъ разность; поелику три первые члена сея пропорцїи извѣстны: слѣдовательно знаемъ будетъ каждый изъ отсѣковъ по (301). Въ фигурѣ 155 извѣстна разность отсѣковъ AD и CD, которая есть самая сторона AC, а пропорцїя опредѣляетъ величину ихъ суммы.

304. Теперь легко можемъ рѣшить сей вопросъ: опредѣлить углы треугольника, зная всѣ три его стороны. Должно провести перпендикуляръ отъ одного изъ угловъ; отъ чего составятся два треугольника ADB и CDB. Потомъ вычислить по предъидущей пропорцїи одинъ изъ отсѣковъ, на примѣръ CD; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ CDB, зная двѣ стороны BC и CD сверьхъ прямаго угла, удобно будетъ вычислить уголъ C по (295).

Примѣръ. Сторона AB дана 142 фута, сторона BC 64 фута, а сторона AC 184 фута, требуется сыскать уголъ C.

Вычисляю разность двухъ отсѣковъ AD и DC по сей пропорціи: 184 : 142 + 64 :: 142 − 64 : AD − DC, или 184 : 206 :: 78 : AD − DC, которую нахожу 87, 32; и такъ (301) меньшій отсѣкъ CD равенъ половинѣ 184 безъ половины 87, 32, т. е. равенъ 48, 34.

Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ CDB ищу уголъ CBD, который будучи сысканъ, покажетъ уголъ C. А чтобъ найти уголъ CBD, составлю сію пропорцію: (295) BC : CD :: R : син. CBD, то есть 64 : 48, 34 :: R : син. CBD.

Дѣлая по логарифмамъ:

логар. 48, 34	- - - - -	1, 6843066
логар. радіуса	- - - - -	1., ...
ариф. дополненіе логар. 64	- -	8, 1938200
сумма или лог. син. CBD	- -	9, 8781266,

которой соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 49°, 03′; слѣдовательно уголъ C будетъ 40°, 57′.

Можно рѣшить сей случай по другому правилу, которое мы здѣсь безъ доказательства покажемъ.

От полусуммы трехъ сторонъ отними каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка. Потомъ сдѣлай сію пропорцію:

Произведеніе двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, къ произведенію двухъ остатковъ, такъ какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса половины искомаго угла. Логариѳмами же вычисляй такимъ образомъ:

Къ двукратному логарифму радіуса приложи логарифмы двухъ остатковъ, и отъ всего отними сумму логарифмовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, остатокъ будетъ логарифмъ квадрата синуса половины искомаго

угла. Возьми половину сего остатка, что будетъ (ариѳ. 230) логарифмъ синуса, который прiискавъ въ таблицахъ получишь половину угла, удвоивъ же оную получишь цѣлый искомый уголъ.

И такъ въ предложенномъ примѣрѣ я сложу три стороны 184, 64, 142, и отъ 195 полусуммы ихъ, отниму порознь 184 и 64; что мнѣ дастъ 11 и 131 въ остаткахъ. Потомъ приложа къ 20. 0000000 двукратному логариѳму радiуса, логариѳмы 1. 0413927, 2. 1172713 остатковъ 11 и 131, буду имѣть 23. 1586640; отъ чего ежели отниму сумму 4.0709978 логариѳмовъ 1. 8061800 и 2. 2648178 сторонъ 64 и 184, останется 19. 0876662, коего половина 9. 5438331 есть логариѳмъ синуса половины угла c; а въ таблицахъ найду, что сiя половина есть почти 20°, $28\frac{1}{2}'$, что удвоивъ получаю 40°, $57'$ углу c, какъ и выше найдено.

Употребляя ариѳметическiя дополненiя дѣйствiе приводится къ слѣдующему сложенiю:

20. 0000000
1. 0413927
2. 1172713
8. 1938200
7. 7351822

39. 0876662. сумма.

Первую цифру уменьшивъ двумя единицами, получаемъ тотъ же выводъ, что и въ предъидущемъ дѣйствiи, но гораздо короче.

Сiе предложенiе служитъ къ вычисленiю разстоянiй, когда нѣтъ инструмента для измѣренiя угловъ; оно даетъ средство дѣлать вычисленiемъ то, что предписано было дѣлать помощiю линѣй въ (122).

Случай, въ которомъ надобно рѣшить треугольникъ имѣющiй всѣ стороны извѣстныя,

часто встрѣчается въ вычисленіи треугольниковъ одинъ отъ другаго зависящихъ.

305. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ, сумма двухъ сторонъ содержится къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ полусуммы двухъ угловъ противулежащихъ симъ сторонамъ, къ тангенсу ихъ полуразности.

Ибо сходственно съ тѣмъ, что доказано (299), АВ : син. С :: АС : син. В; и такъ (97) АВ + АС : АВ — АС :: син. С + син. В : син. С — син. В. Но (286) син. С — син. В : син. С — син. В :: тан. $\frac{C+B}{2}$: тан. $\frac{C-B}{2}$; слѣдовательно АВ + АС : АВ — АС :: тан. $\frac{C+B}{2}$: тан. $\frac{C-B}{2}$. фиг. 156.

306. Сіе предложеніе служитъ къ разрѣшенію треугольника, коего извѣстны двѣ стороны и уголъ въ нихъ содержимый. Ибо, ежели на примѣръ извѣстенъ уголъ А, то вычтя его изъ 180°, извѣстна будетъ и сумма двухъ угловъ В и С. И такъ взявъ полуостатокъ, который произойдетъ отъ сего вычитанія, и приискавъ тангенсъ его въ таблицахъ, получимъ съ двумя сторонами АВ и АС, кои полагаются извѣстными, три извѣстные члена въ доказанной пропорціи; слѣдовательно найдется четвертый членъ, которой покажетъ полуразность двухъ угловъ В и С; зная же полусумму и полуразность сихъ угловъ, можно найти (301) большій изъ нихъ, прилагая полуразность къ полусуммѣ; и меньшій, отнимая отъ сей оную. Наконецъ сыскавъ сіи два угла, удобно будетъ найти третію сторону по вышепоказанному предложенію (299).

Примѣръ. Да будетъ сторона АВ 142 фута, сторона АС 120, и уголъ А 48°, спрашивается два угла С и В, и сторона ВС.

Вычтя 48° изъ 180°; останется 132° суммѣ двухъ угловъ c и в; слѣдовательно 66° полусуммѣ ихъ. Потомъ 142+120 : 142 — 120 : : тан. 66° : : тан. $\frac{c-в}{2}$ или 262 : 22 : : тан. 66° : тан $\frac{c-в}{2}$.

Дѣлая по логарифмамъ:

логар. тан. 66° - - - - -	10, 3514169
логар. 22 - - - - - -	1, 3424227
арифм. дополненіе 262 - - -	7, 5816987
сумма или логар. полуразности -	19. 2755383,

которой соотвѣтствуетъ въ таблицѣ 10°, 41′.

Приложа сію полуразность къ полусуммѣ 66°, и отнявъ отъ сей оную, буду имѣть, какъ явствуетъ:

66°, 00′	66°, 00′
10, 41	10, 41
уголъ c = 76, 41.	уголъ в = 55, 19.

Наконецъ для сысканія стороны вс, сдѣлаю сію пропорцію: син. c : ав : : син. а : вс, то есть син. 76°, 41′ : 142 ф : : син. 48° : вс.

Дѣлай какъ въ прежнихъ примѣрахъ, найдется вс равна 108, 4 ф.

307. Сіи-то суть способы употребляемые для рѣшенія треугольниковъ: теперь прилагаются нѣкоторые примѣры, какъ они могутъ быть приложены къ фигурамъ имѣющимъ больше нежели три стороны.

308. Положимъ, что c и d суть два пред-
фиг. 157. мѣта, къ которымъ нельзя подойти, но нужно знать ихъ разстояніе.

Надлежитъ вымѣрять основаніе ав, такое, чтобъ съ оконечностей его были видны оба предмѣты c и d; потомъ должно измѣрить при точкѣ а углы cав, dав, которые составляютъ съ ав линеи ac и аd мысленно проведенныя отъ точки а къ двумъ предметамъ c и d; также

должно измѣрить при точкѣ в углы сва и dва. Предположивъ сiе, въ треугольникѣ сва извѣстны будутъ углы сав, сва и сторона ав; посему найдется сторона ас (300). Также въ треугольникѣ аdв извѣстны будутъ два угла dав, dва и сторона ав; чего ради по тѣмъ же началамъ удобно будетъ вычислить сторону аd. Потомъ проведя мысленно линѣю сd, составится треугольникъ саd, въ которомъ извѣстны двѣ вычисленныя стороны ас, аd, и уголъ саd содержимый въ оныхъ; ибо сей уголъ есть разность двухъ угловъ сав, dав, кои вымѣрены; почему найдется сторона сd (306).

309. Можно также симъ самымъ способомъ узнать, какое есть направленiе прямой сd, хотя бы и не можно было подойти къ сей линѣи. Ибо въ томъ же треугольникѣ саd можно вычислить уголъ асd, который дѣлаютъ прямыя сd и ас; естьли же чрезъ точку с провесть мысленно линѣю сz паралельную ав, то уголъ асz будетъ суплементъ угла сав (40); слѣдовательно взявъ разность извѣстнаго угла асz и вычисленнаго угла асd, извѣстенъ будетъ уголъ dсz, которой составляетъ прямая сd съ zс или съ ея паралельною ав; и поелику весьма легко узнать по компасу положенiе прямой ав, то и направленiе прямой сd будетъ извѣстно.

310. Говоря о линѣяхъ (3) мы сказали, что покажемъ способъ опредѣлять точки тойже прямой линѣи, когда что нибудь препятствуетъ отъ одной оконечности оной видѣть другую. Вотъ какъ должно приступить къ сему:

Внѣ линѣи ав, о которой разсуждается, избравъ такую точку с, отъ которой бы можно было видѣть оба концы а и в, должно вымѣрить разстоянiя ас и св, или непосредственно, или составляя треугольники имѣющiе сто- Фиг. 15

ронами сїи линѣи, и которые бы можно было вычислить подобно, какъ въ предѣидущемъ примѣрѣ (308). Тогда двѣ стороны AC и CB треугольника ACB и уголъ ACB, который въ нихъ содержится, будутъ извѣстны; и посему найдется (306) уголъ BAC. Сдѣлавъ сїе, надобно поставить по какому либо направленїю CD нѣсколько колышковъ, и измѣривъ уголъ ACD, знаемы будутъ въ треугольникѣ ACD, сторона AC и два угла A и ACD; чего ради найдется (300) сторона CD. Послѣ сего надлежитъ продолжать ставить колышки въ направленїи CD, доколѣ пройдена будетъ длина равная вычисленной длинѣ; точка D, гдѣ остановишся, будетъ впрямъ съ точками A и B.

311. Естьли бы не возможно было сыскать точку C, отъ которой бы могли быть видимы вдругъ обѣ точки A и B, то можно прибѣгнуть къ слѣдующему способу:

Фиг. 159. Надлежитъ сыскать точку C, отъ которой бы *можно было видѣть точку* B; *и другую точку* E, *отъ которой бы видимы были точки* A и C; потомъ измѣривъ или опредѣливъ какимъ нибудь способомъ почерпнутымъ изъ предѣидущихъ началъ, разстоянїя AE, EC и CB, надлежитъ измѣрить при точкѣ E уголъ AEC, а при C уголъ ECB: тогда въ треугольникѣ AEC, зная двѣ стороны AE, EC и содержимый въ нихъ уголъ AEC, должно вычислить (306) сторону AC и уголъ ECA, который отнявъ отъ измѣреннаго угла ECB, найдется уголъ ACB. И какъ уже вычислена AC и измѣрена CB, то выходитъ предѣидущїй случай, такъ какъ бы точки A и B были видимы отъ точки C; чего ради надлежитъ окончить по вышеписанному.

Фиг. 160. 312. Ежели требуется измѣрить высоту, къ основанїю которой не можно приближиться,

какъ на примѣръ высоту какой нибудь горы; то должно измѣрить на землѣ основаніе FG, отъ концовъ котораго можно бы было видѣть точку A, которой высота ищется; потомъ надлежитъ вымѣрить графометромъ, коего высоту представляютъ прямыя BF и CG, углы ABC, ACB составляемые линѣями BA, CA, проведенными мысленно отъ двухъ точекъ B и C къ точкѣ A, съ основаніемъ BC; наконецъ въ одномъ изъ стояній, на примѣръ въ C, должно расположить сей инструментъ подобно, какъ въ примѣрѣ относительномъ до фигуры 150, и измѣрить уголъ ACD, показующій наклоненіе линѣи AC къ горизонту: тогда зная въ треугольникѣ ABC два угла ABC, ACB и сторону BC, не трудно будетъ вычислить (300) сторону AC; а въ треугольникѣ ADC, въ которомъ теперь извѣстны сторона AC, измѣренной уголъ ACD, и уголъ D прямой, ибо AD есть высота перпендикулярная, легко найдется AD, которая покажетъ высоту точки A надъ точкою C. Естьли желательно потомъ знать высоту точки A надъ точкою B, и надъ всякою другою точкою, остается только нивеллировать, то есть искать разность высоты между точками C и B, о чемъ мы скоро говорить будемъ.

313. Мы сказали (153), что для вычисленія площади какого нибудь сегмента AZBV, въ коемъ число градусовъ дуги ABV и радіусъ извѣстны, надлежитъ вычислить площадь треугольника JAB, дабы вычесть оную изъ площади сектора JAVB; теперь сіе легко сдѣлать можемъ; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ JZB, извѣстны сверхъ прямаго угла, сторона JB и уголъ ZJB половина угла AJB, измѣряемаго дугою AVB; посему удобно найдется (295) JZ высота треугольника, и BZ половина основанія. фиг. 74.

Явствуетъ еще изъ предъидущаго, способъ составлять уголъ или дугу опредѣленнаго числа градусовъ и минутъ.

Фиг. 145. Проведемъ прямую CB произвольной длины, которую возмемъ за сторону угла, и написавъ изъ центра C дугу BDA, проведемъ радїусъ CA и хорду BA; естьли вообразимъ еще перпендикуляръ CJ и вымѣряемъ CB, то въ прямоугольномъ треугольникѣ CJB будутъ извѣстны прямой уголъ, сторона BC, и уголъ BCJ половина того угла, о которомъ разсуждается; посему можно будетъ вычислить BJ, которой двукратная будетъ величина хорды AB. И такъ взявъ отверстїе циркуля равное сей двукратной, изъ точки B, какъ изъ центра, замѣть точку A на дугѣ BDA, и проведи CA, получишь требуемый уголъ.

Мы могли бы показать здѣсь безчисленное множество другихъ употребленїй Тригонометрїи; но довольно и сихъ для наставленїя; впрочемъ мы будемъ имѣть довольно случаевъ въ продолженїи требовать пособїй отъ сей части.

О нивеллированїи или уравненїи.

314. Многїя наблюденїя доказываютъ, что поверхность земли не есть плоская, каковою она кажется; но кривая и даже сферическая, или почти сферическая. Когда корабль приближается къ какому нибудь берегу, то первые предметы представляющїеся зрѣнїю его, суть предметы самые возвышенные. Но естьли бы поверхность

Фиг. 161. земли была плоская, то въ тоже время, въ которое открывается башня B, видима бы была и вся прилежащая земля ABC, которой не видно; понеже DAC поверхность земли понижается болѣе и болѣе въ разсужденїи BD горизонтальной

линѣи корабля. И такъ двѣ точки D и B могутъ представиться на той же горизонтальной линѣи DB, хотя онѣ и неравно отстоятъ отъ поверхности, и слѣдовательно отъ центра земли T. Горизонтальною линѣею называется линѣя проведенная на плоскости касающей поверхность моря, или паралельно такъ называемой горизонтальной плоскости. Вертикальная же линѣя есть прямая перпендикулярная къ горизонтальной плоскости.

Нивеллированїе называется дѣйствїе опредѣлять, чемъ далѣе одинъ предмѣтъ другаго отстоитъ отъ центра земли.

315. Когда одинъ изъ сихъ предмѣтовъ видимый отъ другаго представляется въ горизонтальной линїи отъ сего послѣдняго исходящей, тогда они различно удалены отъ центра земли. Дабы узнать сїю разность, примѣтимъ, что расстоянїе DJ, въ которомъ можно видѣть какой нибудь земный предметъ, или по крайней мѣрѣ расстоянїе, въ которомъ нивеллируютъ, есть всегда столь малое, что будучи вымѣрено на поверъхности земли, можетъ почесться равнымъ тангенсу DB; но сказано выше (129), что тангенсъ DB есть средняя пропорцїональная между всякою сѣкущею проведенною отъ точки B, и внѣшнею частїю BJ сей сѣкущей; а ради малости дуги DJ можно почесть сѣкущую, проходящую чрезъ точку B и центръ T, равною дїаметру, то есть прямой двукратной прямыя JT или DT; чего ради BJ будетъ четвертый членъ сей пропорцїи: 2 DT : DJ :: DJ ; BJ. фиг. 162.

Положимъ, на примѣръ, что DJ вымѣренная на поверхности земли содержитъ 1000 тоазовъ или 6000 футъ. Понеже радїусъ земли имѣетъ 19611500 футъ, то найдется BJ по сей пропорцїи: 39223000 : 6000 :: 6000 : BJ; вычисляя полу-

чишь 0, 91783 ф, что равно 11 д. 0 л. 2 т; то есть, между двумя предметами в и d, на тысячу тоазовъ отстоящими, и которые находятся въ тойже горизонтальной линiи, разность вj разстоянiй ихъ отъ центра земли, есть 11 д. 0 л. 2 т.

316. Вычисливъ одну разность, какъ вj, можно гораздо легче вычислять разности соотвѣтствующiя меньшему разстоянiю, потому что разности вj, bi суть почти параллельны и равны линѣямъ DQ, Dq, которыя (170) содержатся между собою, какъ квадраты хордъ или дугъ Dj, Di; ибо здѣсь хорды и дуги могутъ быть взяты одна за другую. И такъ, чтобъ найти bi разность соотвѣтствующую 5000 футамъ, я сдѣлаю сiю пропорцiю: $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,91783 :$ bi, которая по вычисленiю найдется 0. 63738 или 7 д. 7 л. $9\frac{2}{5}$ т.

317. Предложивъ сiи понятiя, дабы узнать
фиг. 163. разность разстоянiй двухъ точекъ в и A отъ центра земли, которыя не находятся на одной горизонтальной линѣи проведенной чрезъ одну которую нибудь изъ оныхъ, должно употребить угломѣрной инструментъ, и расположивъ его, какъ сказано въ примѣрѣ относительномъ до фиг. 150, измѣрить уголъ BCD; измѣривъ же и расстоянiе CD или Cj помощiю цѣпи, протягая оную горизонтально, и въ разные прiемы по поверхности земли AVB, можно будетъ въ треугольникѣ CDB, принимая его за прямоугольный въ D, вычислить BD, къ коей должно приложить са высоту инструмента и разность уравненiя Dj, вычисленную сходственно съ тѣмъ, что сказано (315 и 316).

Но какъ сей образъ дѣйствiя предполагаетъ великую точность въ измѣренiи угла BCD, и весьма вѣрный инструментъ; то обыкновенно

предпочитается другой продолжительнѣйшій способъ, который мы намѣрены теперь предложить.

318. Употребляютъ для сего инструментъ, какой представляетъ фигура 164, и которой называется ватерпасъ или уровень. Главная его часть есть пустая трубка изъ жести, или изъ другаго какого либо металла сдѣланная и загнутая въ концахъ A и B. Въ выдавшіяся двѣ равныя части AC и BD, вставляютъ другія двѣ трубки стеклянныя J и K, склеенныя съ частями AC и BD. Весь каналъ наполняютъ водою, доколѣ она взойдетъ въ сіи двѣ стеклянныя трубки; когда вода поднимается въ каждой изъ оныхъ до равной высоты, то сіе доказываетъ, что линѣя проходящая по поверьхности воды возвысившейся въ обѣихъ сихъ трубкахъ, есть линѣя горизонтальная, и тогда употребляютъ сей инструментъ слѣдующимъ образомъ:

Производятъ многія стоянія, на примѣръ въ точкахъ D, C, B; утвердивъ въ двухъ точкахъ A и N два кола перпендикулярно, наблюдатель находящійся въ D смотритъ по ватерпасу попеременно на каждой изъ оныхъ, и замѣчаетъ двѣ точки E и F соотвѣтствующія горизонтальной линѣи. Потомъ поставя другой колъ въ какой нибудь точкѣ P, по другую сторону точки C, замѣчаетъ подобнымъ образомъ двѣ точки G и H. Измѣряетъ при каждомъ стояніи высоты AE, GF, JH и проч. и исправя ихъ уравненіями (316) приличествующими разстояніямъ KE, KF, LG и проч. безъ дальной точности измѣреннымъ, слагаетъ сіи высоты, и находитъ разность уравненія между точками A и B. фиг. 165.

Ежели бы во время сихъ дѣйствій не всегда поднимались въ верхъ, явствуетъ, что вмѣсто сложенія, надлежало бы вычитать количества, на которыя спускались.

Поелику мы не намѣрены здѣсь предложить подробнѣйшаго изслѣдованія инвеллированія, то не будемъ останавливаться для показанія другихъ средствъ и инструментовъ, которые для сего употребляются. Можно читать о семъ предлогѣ въ переведенномъ на россійской языкъ математическомъ курсѣ Г. Белидора, и въ Молодомъ Геодетѣ Г. Котельникова.

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Предварительныя понятія.

319. Сферическій треугольникъ есть часть поверьхности шара, включенная между тремя дугами круга, имѣющими общій свой центръ, центръ шара; и посему сіи три дуги, суть дуги великаго круга тогоже самаго шара.

Ежели отъ трехъ угловъ A, F, G. сферическаго треугольника AFG, проведены будутъ три радіуса AC, FC, GC къ центру шара C; то представится пространство CAFG, какъ треугольная пирамида, имѣющая вершину свою C въ центрѣ шара, и которой вогнутое основаніе AFG есть часть поверьхности сего шара. Дуги AF, FG, AG, криволинейныя стороны основанія, суть взаимныя сѣченія поверьхности шара съ плоскостями ACF, FCG, GCA, составляющими боковую поверьхность сея пирамиды. Фиг. 166.

Уголъ A содержимый въ двухъ дугахъ AF, AG, измѣряется прямолинѣйнымъ угломъ IAK, содержимымъ въ тангенсахъ AI, AK сихъ двухъ дугъ; каждой изъ сихъ тангенсовъ находится на плоскости той дуги, къ которой онъ принадлежитъ, и оба они перпендикулярны радіусу CA (48), которой есть сѣченіе двухъ плоскостей ACF, ACG; по сему (191) уголъ содержимый въ двухъ тангенсахъ, есть тотъ же, что и уголъ содержимый въ плоскостяхъ двухъ дугъ ACF, и ACG; слѣдовательно

320. 1 е. Какой-либо сферической уголъ FAG не что иное есть, какъ уголъ содержимый въ плоскостяхъ двухъ его сторонъ AF, AG.

321. 2е. Углы составляемые дугами великаго круга, встрѣчающимися на поверьхности шара, имѣютъ тѣже свойства, что и плоскіе углы; то есть свойства показанныя въ (192 193 и 194).

322. По сему двѣ стороны сферическаго треугольника суть между собою перпендикулярны, когда плоскости сихъ дугъ взаимно перпендикулярны.

Ежели представимъ, что двѣ плоскости ACG, ACF, продолжены безпредѣльно во всѣ стороны; то явно, что сѣченіе каждой съ поверьхностію шара, будетъ великій кругъ, и что сіи два великіе круга разсѣкутся взаимно на двѣ равныя части въ точкахъ A и D, находящихся на продолженномъ общемъ сѣченіи AC; ибо двѣ плоскости проходящія чрезъ центръ, имѣютъ общее сѣченіе діаметръ шара.

323. По сему *единокрайнія двѣ стороны AG, AF сферическаго треугольника не могутъ въ иной точкѣ встрѣтиться какъ на разстояніи AGD, или AFD равномъ 180°, щитая отъ начала ихъ соединенія.*

324. Ежели взяты будутъ двѣ дуги AB, AE каждая въ 90°, и ежели чрезъ двѣ точки B и E и центръ C проведена будетъ плоскость, которой сѣченіе съ шаромъ составляетъ великій кругъ BENMO; говорю, что сей кругъ будетъ перпендикуляренъ двумъ кругамъ ABD, AED.

Ибо ежели проведены будутъ радіусы BC, EC, то углы ACB, ACE имѣющіе мѣрою дуги AB, AE, каждую въ 90°, будутъ прямые; посему линѣя AC перпендикулярна двумъ прямымъ CE, BC; слѣдовательно (180) она перпендикулярна ихъ плоскости, то есть кругу BENMO; а по сему два круга AED, ABD, проходящіе чрезъ прямую AD, суть также перпендикулярны сему самому кругу

(184); чего ради обратно и сей кругъ имъ перпендикулярень.

Поелику не предположили мы никакой опредѣленной величины углу GAF, или EAB; то явно, что тоже самое воспослѣдуетъ, какая бы ни была величина сего угла; а изъ сего и слѣдуетъ, что кругъ BENMO перпендикуляренъ всѣмъ кругамъ проходящимъ чрезъ прямую AD.

Прямая AD называется ось круга BENMO; а двѣ точки A и D, сущїя на поверьхности шара, называются полюсы (поли) сего же круга.

325. И такъ заключимъ, 1 е, что полюсы какого либо великаго круга, равно отдалены отъ всѣхъ точекъ обвода сего великаго круга; и разстоянїе сихъ точекъ до каждаго изъ полюсовъ, измѣряемое дугою великаго круга, есть дуга 90°.

И обратно, ежели какая либо точка A поверьхности шара, удалена на 90° отъ двухъ точекъ B и E, взятыхъ на дугѣ великаго круга; то точка A есть полюсъ сего великаго круга.

326. 2 е. Что когда дуга BF великаго круга, перпендикулярна другой дугѣ BE великаго круга; то она непремѣнно проходитъ чрезъ полюсъ сей дуги, или по крайней мѣрѣ пройдетъ, естьли продолжена будетъ довольно.

327. 3 е. Что ежели двѣ дуги BF, EG великаго круга перпендикулярны третьей дугѣ великаго круга BE; точка A, гдѣ они встрѣчаются, есть полюсъ сея дуги.

328. Поелику двѣ прямыя BC, EC суть перпендикулярны прямой AD при той же точкѣ C; то уголъ BCE въ оныхъ содержимый (191) есть

мѣра наклоненія двухъ плоскостей ABD, AED; или мѣра сферическаго угла EAB или GAF; чего ради

Сферической уголъ GAF имѣетъ мѣрою дугу BE великаго круга, которую стороны его (продолженныя ежели потребно) обьемлютъ въ разстояніи на 90° отъ вершины.

329. Ежели представимъ, что полукружіе ABD обращается около діаметра AD, и что отъ различныхъ точекъ K, B, H, его обвода опущены на AD перпендикуляры RQ, BC, HP; то явствуетъ.

1 е. Что каждая изъ сихъ точекъ описываетъ обводъ круга, коего центръ есть на AD, въ точкѣ, гдѣ падаетъ перпендикуляръ; сей же перпендикуляръ есть радіусъ описываемаго круга.

2 е. Что дуги RS, BE, HL, описываемыя во время сего обращенія, и перенятыя двумя плоскостями ABD, AED, суть того же числа градусовъ; *ибо ежели проведены будутъ линѣи* SQ, EC, LP, *будутъ всѣ онѣ перпендикулярны* къ AD, поелику онѣ суть не что иное какъ радіусы RQ, BC, HP, достигшіе плоскости AED; посему (191) каждый изъ угловъ RQS, BCE, HPL; или каждая изъ дугъ RS, BE, HL измѣряетъ наклоненіе двухъ плоскостей ABD, AED; чего ради всѣ сіи дуги суть того же числа градусовъ.

3 е. Величины сихъ дугъ RS, BE, HL, суть пропорціональны синусамъ дугъ AR, AB, AH, которые измѣряютъ ихъ разстояніе до того же полюса A; или, что тоже самое, они пропорціональны косинусамъ ихъ разстояній до великаго круга, которому они параллельны. Ибо явно, что сіи дуги будучи подобны, пропорціональны своимъ радіусамъ RQ, BC, HP, кои суть синусы дугъ AR, AB, AH, или косинусы дугъ BR, O, и BH.

330. Ежели вообразить, что шаръ ABDMON представляетъ землю, а AD ея ось, или тотъ изъ ея дiаметровъ, около котораго производитъ она суточное обращенiе; то кругъ BENMO, равноотстоящiй отъ своихъ полюсовъ A и D, называется екваторъ. Круги ABD, AED и всѣ имъ подобные, коихъ плоскости проходятъ чрезъ ось AD, называются меридiаны; малые круги, коихъ части представляютъ здѣсь дуги RS, HL, называются параллели екватора, или просто параллели. Дуги BH, EL, измѣряющiя разстоянiе параллели до екватора, называются широтою сея параллели или мѣста лежащаго на ея окружности.

Дабы опредѣлить положенiе мѣста на землѣ, относятъ его къ двумъ кругамъ неподвижнымъ и между собою перпендикулярнымъ, каковы суть круги ABDM, BENMO, такимъ образомъ: берутъ за сравнительный кругъ меридiанъ ABDM, проходящiй чрезъ извѣстное и опредѣленное мѣсто; и чтобъ утвердить положенiе другаго мѣста L, воображаютъ чрезъ сiе мѣсто другой меридiанъ AELD. Явствуетъ, что положенiе сего меридiана знаемо будетъ, ежели извѣстно, сколько градусовъ въ дугѣ BE, включенной между точками B и E, гдѣ сей меридiанъ встрѣчается съ екваторомъ. Точка B будучи неподвижна, къ которой отношенiе имѣютъ всѣ другiе меридiаны; дуга BE называется тогда долготою (*) меридiана AEL, и всѣхъ мѣстъ находящихся на семъ меридiанѣ; и такъ дабы опредѣлить положенiе мѣста L, остается только знать число градусовъ дуги EL;

(*) Обыкновенно щитаютъ долготу отъ запада къ востоку; кругъ, отъ котораго начинаютъ щитать, называется первый меридiанъ: Французы избрали за сей меридiанъ тотъ, который проходитъ чрезъ островъ Феръ, западнѣйшiй изъ Канарскихъ острововъ.

сїе-то называется широта мѣста L, также и всѣхъ мѣстъ находящихся на параллели, которой дуга H L есть часть.

Изъ сего видно, что всѣ мѣста находящїяся на томъ же меридїанѣ, имѣютъ туже долготу; а находящїяся на тойже параллели туже широту; но одна только точка L, (по крайней мѣрѣ въ тойже половинѣ шара, или въ томъ же полушарїи) можетъ имѣть въ тоже время данную долготу и широту. Чего ради положенїе мѣста уже опредѣлено, когда долгота и широта его извѣстны; но въ разсужденїи широты должно знать еще къ которому полюсу оную щитать должно. И такъ положивъ, что полюсъ A есть полуденный или южный; а полюсъ D полунощный или сѣверный, должно знать южная или сѣверная широта; ибо легко можно представить, что можетъ быть, и что дѣйствительно есть точка въ полушарїи южномъ, которой положенїе тоже, что и точки L находящейся въ сѣверномъ полушарїи.

Величина градуса великаго круга земли равна 20 морскимъ Французскимъ лигамъ, то есть 20 такимъ лигамъ, изъ коихъ каждая имѣетъ 2853 туаза; также земной градусъ равенъ 60 италїянскимъ милямъ, 15 нѣмецкимъ милямъ и 104 верс. 97 саж. Посему ежели идешь по екватору; то чрезъ каждыя 60 италїянскихъ миль перемѣняется долгота однимъ градусомъ; также идучи по меридїану, чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется однимъ градусомъ широта. Естьли же идешь по параллели екватора; то явно, что чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется долгота болѣе нежели на градусъ, и тѣмъ болѣе, чемъ та параллель, по которой идешь, болѣе удалена отъ екватора. Чтобъ найти сколькимъ градусамъ долготы соотвѣтствуетъ нѣкоторое число миль H L, пе-

рейденныхъ по извѣстной параллели, должно сдѣлать сію пропорцію: косинусъ широты къ радіусу, такъ какъ число миль перейденныхъ по параллели къ четвертому члену, который будетъ число миль соотвѣтствующей дуги въ екватора, которая означаетъ перемѣну въ долготѣ. Сіе есть непосредственное слѣдствіе сказаннаго въ (329). Напримѣръ полагая что въ широтѣ 47°, 20′ пройдено 18 Италїянскихъ миль по параллели екватора, и спрашивается, на сколько перемѣнилась долгота; то будетъ сія пропорція: кос. 47°, 20′ или син. 42°, 40′ : R :: 18 миль къ четвертому члену, который выдетъ 26, 56 м. Итакъ перемѣнили долготу на 26, 56 м. или на 0°, 26′, 34″.

Обратимся теперь къ свойствамъ шара.

331. Положимъ, что AFJG, BFHG суть два великїе круги шара; и ABDEJH третїй великїй кругъ, сѣкущїй сїи два перпендикулярно; слѣдуетъ изъ сказаннаго (326), что кругъ ABDEJH проходитъ чрезъ полюсы двухъ круговъ AFJG, BFHG; да будутъ сїи полюсы D и E; а DK и EL двѣ оси. Поелику углы ACD, BCE прямые; то, ежели отъ каждаго изъ сихъ отнятъ будетъ общїй уголъ BCD; остальные углы ACB, DCE будутъ равные; а посему и дуги AB, DE равны; чего ради дуга DE, измѣряющая кратчайшее разстоянїе полюсовъ двухъ великихъ круговъ, равна дугѣ AB, измѣряющей меньшїй изъ двухъ угловъ, которые сїи круги дѣлаютъ. Фиг. 167

Свойства сферическихъ треугольниковъ.

332. Явствуетъ, что чрезъ двѣ точки, взятыя на поверьхности шара, можно провесть только одну дугу великаго круга. Ибо сей великїй кругъ есть сѣченїе поверьхности шара съ плоскостїю долженствующею пройти чрезъ центръ; извѣстноже, что чрезъ три данныя точки можно провести одну только плоскость.

333. Хотя сферической треугольникъ можетъ имѣть нѣкоторыя изъ своихъ частей больше 180°; однако мы будемъ разсуждать о такихъ только, которыхъ каждая часть меньше 180°; поелику можно всегда знать одинъ изъ сихъ
Фиг. 166. треугольниковъ посредствомъ другаго. Напримѣръ, ежели предлагается треугольникъ ABEMU составленный изъ нѣкоторыхъ дугъ AB, AU, и дуги BMU большей 180°; то вообразивъ цѣлый кругъ BMUB, можно вмѣсто треугольника ABEMU взять треугольникъ BOUA, котораго дуга BOU меньше 180°; ибо части перваго треугольника или равны частямъ втораго, или ихъ супплементы до 180°, или до 360°; посему и видно, что одинъ изъ сихъ треугольниковъ можетъ быть извѣстенъ посредствомъ другаго.

334. Каждая сторона сферическаго треугольника меньше суммы двухъ прочихъ сторонъ.

Сїе явствуетъ.

335. Сумма трехъ сторонъ сферическаго треугольника всегда меньше 360°.

Поелику (334) FG меньше DG + DF; но GA + AF сложенныя съ DG + DF составляютъ 360°; слѣдовательно AG + AF сложенныя съ FG будутъ меньше 360°.

336. Да будетъ ABC какой нибудь сферической треугольникъ; и DEF другой сферической треугольникъ такой, что точка A есть полюсъ дуги EF, точка C полюсъ дуги DE, и точка B полюсъ дуги DF; говорю, что каждая сторона треугольника DEF будетъ супплементъ угла противулежащаго ей въ треугольникѣ ABC; и каждый уголъ треугольника DEF будетъ супплементъ стороны противулежащей ему въ треугольникѣ ABC. фиг. 168.

Ибо когда точка A есть полюсъ дуги EF; точка E должна быть удалена отъ точки A на 90° (325); посему же, когда C есть полюсъ дуги DE, точка E должна отстоять на 90° отъ точки C; слѣдовательно (325) точка E есть полюсъ дуги AC; такимъ же образомъ можно доказать, что точка D есть полюсъ дуги BC, а F полюсъ дуги AB.

Положивъ сіе, продолжимъ дуги AC, AB, пока встрѣтятся съ дугою EF въ точкахъ G и H; поелику точка E есть полюсъ дуги ACG, то дуга EG 90°, а точка F есть полюсъ дуги AHB, то и дуга FH 90°; посему EG + FH или EG + FG + GH или EF + GH равны 180°; но дуга GH есть мѣра угла A (328), ибо каждая изъ дугъ AG, AH равна 90°; слѣдовательно EF + A равны 180°; чего ради дуга EF есть супплементъ угла A. Такимъ же образомъ докажется, что дуга DE есть супплементъ угла C, а DF супплементъ угла B.

Продолжимъ дугу AB, доколѣ встрѣтится съ дугою DF въ точкѣ J. Каждая изъ дугъ AH и BJ будетъ 90°, ибо точки A и B суть полюсы дугъ EF, DF; посему AH + BJ, или AH + AB + AJ, или HJ + AB равны 180°, но дуга HJ есть мѣра угла F (328); ибо точка F поль дуги HJ; слѣдовательно F + AB равны 180°; чего ради уголъ F есть суп-

плементь дуги AB. Такимъ же образомъ докажется, что уголъ E есть супплементъ дуги AC; а уголъ D супплементъ дуги BC.

337. Заключимъ отсюду, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника всегда меньше 540° или трижды 180°, а больше 180°.

Поелику сумма трехъ угловъ A, B, C съ суммою трехъ сторонъ EF, DF, DE равны трижды 180° (336). Слѣдовательно, 1 е, сумма трехъ угловъ A, B, C меньше трижды 180°; или 540°. 2 е, ибо сумма трехъ сторонъ EF, DF, DE (335) меньше 360° или дважды 180°; остается для суммы трехъ угловъ A, B, C больше 180°.

338. Сферическій треугольникъ можетъ имѣть всѣ три угла прямые, и всѣ три угла тупые.

И такъ видно, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника не такое количество, которое бы всегда было тоже, какъ въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ; слѣдовательно не можно изъ двухъ извѣстныхъ угловъ заключить о третьемъ.

339. Поелику каждая изъ частей треугольника DEF есть супплементъ каждой противулежащей ей части въ треугольникѣ ABC; то можно рѣшить одинъ изъ сихъ треугольниковъ посредствомъ другаго; ибо зная части одного, извѣстны будутъ части другаго. Мы будемъ употреблять сей способъ; и понеже сіи два треугольника часто будутъ встрѣчаться; то для сокращенія назовемъ треугольникъ DEF супплементнымъ (исполнительнымъ) треугольникомъ.

340. Два сферическіе треугольника, изображенные на томъ же или равныхъ шарахъ, равны бываютъ, 1 е, когда имѣютъ равную сторону прилежащую двумъ равнымъ

угламъ единъ по единому. 2 е, когда имѣютъ равный уголъ содержимый въ равныхъ сторонахъ едина по единой. 3 е, когда имѣютъ три стороны равныя едина по единой. 4 е, когда имѣютъ три угла равные единъ по единому.

Первые три случая доказываются точно такъ, какъ и въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ. Смотри 80, 81 и 83.

Что касается до четвертаго случая, поелику онъ не имѣетъ мѣста въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ, то онъ доказывается особливо слѣдующимъ образомъ:

Да будутъ написаны каждаго изъ треугольниковъ ABC и abc супплементные треугольники DEF и def. Понеже углы A, B, C, равны угламъ a, b, c, каждый каждому, то и стороны EF, DF, DE супплементы перьвыхъ угловъ, будутъ также равны сторонамъ ef, df, de супплементамъ послѣднихъ; и такъ по третьему изъ помянутыхъ случаевъ сіи два треугольника DEF и def будутъ совершенно равны; чего ради и углы D, E, F, будутъ равны угламъ d, e, f, каждый каждому; а посему и стороны BC, AC, AB супплементы первыхъ трехъ угловъ, будутъ равны сторонамъ bc, ac, ab, супплементамъ трехъ послѣднихъ угловъ. фиг. 168 169

341. Въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ углы противъ равныхъ сторонъ взаимно равны; и обратно, ежели два угла въ сферическомъ треугольникѣ взаимно равны, противулежащія имъ стороны также равны.

Отъ равныхъ сторонъ AB, AC, отними равныя дуги AD, AE, и проведи дуги великихъ круговъ DC, BE: и такъ два треугольника ADC, AEB, имѣющіе общій уголъ, содержимый въ двухъ равныхъ сторонахъ едина по единой, будутъ взаимно фиг. 170

равны (340); а посему и дуга BE равна будетъ дугѣ CD; слѣдовательно два треугольника BDC и BEC взаимно равны; понеже кромѣ DC равной BE, какъ сіе видѣли, они имѣютъ BC общую, и еще прочія стороны BD, CE равныя; ибо сіи стороны суть остатки двухъ равныхъ дугъ AB, AC, отъ которыхъ отняты равныя дуги AD, AE. А изъ сего, что два треугольника взаимно равны, можно заключить, что уголъ DBC или ABC равенъ углу ECB или ACB.

Что касается до второй части предложенія, то она есть слѣдствіе перьвой; ибо вообразивъ супплементный треугольникъ DEF, двѣ стороны
фиг. 168. его DF, DE, будучи супплементы равныхъ угловъ B и C, суть равны; по сему треугольникъ DEF будетъ равнобедренный; и такъ углы E и F будутъ взаимно равны; чего ради и супплементы ихъ стороны AC и AB будутъ взаимно равны.

фиг. 171. 342. *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC большая сторона противулежитъ большему углу, и обратно.*

Ежели уголъ B больше угла A, можно внутри треугольника провести дугу великаго круга BD такъ, чтобъ сдѣлала уголъ ABD равный углу BAD; посему BD будетъ равна AD (341); но BD+DC больше BC; слѣдовательно AD+DC или AC будетъ больше BC.

Обратное удобно доказать можно подобнымъ образомъ, употребляя супплементный треугольникъ.

Послѣднія показанныя предложенія полезны въ рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, гдѣ все искомое опредѣляется синусами или тангенсами, которые принадлежа дугамъ меньшимъ 90°, или ихъ супплементамъ, могутъ часто навести сумнѣніе, которую изъ сихъ дугъ принять должно; но сіи знанія не довольны для показанія, въ какихъ

случаяхъ искомое должно быть больше или меньше 90°, и въ какихъ случаяхъ можно взять и то и другое.

Средства узнавать, въ какихъ случаяхъ искомые углы, или стороны прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ должны быть больше или меньше 90°.

343. Хотя два и даже три угла прямоугольнаго сферическаго треугольника могутъ быть прямые, а посему могутъ быть въ семъ треугольникѣ двѣ или три ипотенузы, однакожъ мы будемъ называть ипотенузой только сторону противулежащую тому прямому углу, о которомъ будемъ разсуждать; а прочїе два угла называть будемъ косвенными углами.

344. Каждый изъ двухъ косвенныхъ угловъ прямоугольнаго сферическаго треугольника одинакъ со стороною ему противулежащею; то есть ежели сторона 90°, то и уголъ 90°, и ежели сторона больше или меньше 90°, то и уголъ будетъ больше или меньше 90°.

Да будетъ уголъ в прямый; ежели вс меньше 90°, то продолживъ оную до точки d, такъ чтобъ вd была 90°; точка d будетъ полюсъ дуги ав (326); почему дуга великаго круга dа, проведенная отъ края стороны ва, будетъ перпендикулярна къ ва; слѣдовательно уголъ dав будетъ прямой; чего ради уголъ сав меньше 90°. Подобнымъ образомъ можно доказать и другїе два случая. фиг. 17

345. Ежели двѣ стороны, или два угла прямоугольнаго сферическаго треугольника одинаки, то есть каждое меньше или больше 90°; ипотенуза всегда будетъ меньше 90°; напротивъ, ежели не одинаки, ипотенуза будетъ больше 90°.

Ибо, положивъ тоже устроенiе что и въ предъидущемъ предложенiи, ежели и AB меньше 90°, уголъ ADB, который долженъ быть (344) одинакъ со стороною AB, будетъ меньше 90°; для тойже причины уголъ ACB будетъ меньше 90°; слѣдовательно уголъ ACD будетъ тупый, и посему больше угла ADC; чего ради AD больше AC (342); но AD 90°, слѣдовательно AC меньше 90°.

Подобнымъ образомъ ежели двѣ стороны BC, и AB около прямаго угла B, каждая больше 90°; фиг. 173. ипотенуза AC будетъ тогда меньше 90°; ибо ежели взять дугу BD равную 90°, точка D будучи полюсъ дуги AB, дуга AD будетъ 90°; но поелику AB больше 90°; уголъ ACB будетъ тупый (344). Тоже и такимъ же образомъ можно сказать и о углѣ ADB; и посему уголъ ADC будетъ острый, слѣдовательно меньше угла ACD; чего ради также AC будетъ меньше AD (342), то есть меньше 90°.

Напротивъ, ежели AB меньше 90°; а BC больше; тогда уголъ ACB, который одинакъ со сто- фиг. 174. роною AB (344), будетъ острый. Тоже самое можно сказать и о углѣ ADB; и посему уголъ ADC будетъ тупый, слѣдовательно больше угла ACD; чего ради AC будетъ больше AD, то есть больше 90°.

Что касается до угловъ сравниваемыхъ съ ипотенузою, истинна сего предложенiя слѣдуетъ изъ того, что каждый изъ угловъ одинакъ съ сопротивною ему стороною (344).

346. Отсюду слѣдуетъ, 1е, что ежели ипотенуза меньше или больше 90°; стороны и косвенные углы будутъ одинаки, или не одинако между собою.

347. 2е. Ежели ипотенуза и одна изъ сторонъ одинаки или не одинаки, остальная сторона и уголъ ей сопротивный будетъ меньше или больше 90°.

Начала для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

348. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ зависитъ отъ трехъ началъ, которыя предложены будутъ по порядку, и изъяснены въ послѣдствіи примѣрами. Первое начало есть общее прямоугольнымъ и косвенноугольнымъ сферическимъ треугольникамъ.

Каждый случай прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ можно рѣшить одною пропорціею, которая всегда можетъ быть выведена изъ одного или другаго изъ трехъ слѣдующихъ началъ.

349. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC пребываетъ всегда сія пропорція: фиг. 175
синусъ одного изъ угловъ содержится къ синусу противулежащей ему стороны, такъ какъ синусъ другаго угла, къ синусу стороны противулежащей сему углу.

Да будетъ точка H центръ шара, BH, AH, HC три радіуса, и отъ вершины угла A да будетъ опущенъ перпендикуляръ AD на плоскость противулежащей стороны BC, и чрезъ сію прямую да пройдутъ двѣ плоскости ADE, ADF, такъ чтобъ радіусы BH, CH были имъ перпендикулярны, а именно радіусъ BH перпендикуляренъ плоскости ADE, а радіусъ CH перпендикуляренъ плоскости ADF. Линѣи AE, DE сѣченія двухъ плоскостей ABH, CBH съ плоскостію ADE, будутъ перпендикулярны къ BH общему сѣченію сихъ двухъ плоскостей; и посему уголъ AED будетъ наклоненіе двухъ плоскостей (191), слѣдовательно равенъ сферическому углу ABC (320); по сей же причинѣ уголъ AFD равенъ будетъ сферическому углу ACB.

Положивъ сїе, два треугольника ADE, ADF, имѣя прямые углы при точкѣ D, дадутъ сїи пропорцїи (295):

R : син. AED :: AE : AD.

и син. AFD : R :: AD : AF.

Слѣд. (100) син. AFD : син. AED :: AE : AF.

Но линѣи AE, AF будучи перпендикуляры опущенные отъ края A дугъ AB, AC къ радїусамъ BH, CH, проходящимъ чрезъ другїе краи сихъ дугъ, суть (269) синусы сихъ самыхъ дугъ; чего ради, понеже углы AED, AFD равны угламъ B и C, будетъ син. C : син. B :: син. AB : син. AC.

Такимъ же образомъ можно доказать, что син. C : син. A :: син. AB : син. BC.

350. Ежели одинъ изъ сравниваемыхъ угловъ прямый, то, поелику синусъ его тогда равенъ радїусу (274), сказанная пропорцїя можетъ быть такъ поставлена: радїусъ къ синусу ипотенузы, такъ какъ синусъ одного изъ косвенныхъ угловъ, къ синусу противулежащей ему стороны.

351. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ, радїусъ содержится къ синусу одной изъ сторонъ около прямаго угла, такъ какъ тангенсъ косвеннаго угла противулежащаго другой сторонѣ, къ тангенсу сей стороны.

фиг. 176. Да будетъ уголъ B прямой. Отъ края C стороны BC да будетъ проведенъ перпендикуляръ CJ къ радїусу шара BD; и чрезъ сїю прямую CJ, да пройдетъ плоскость CJE такъ, чтобъ радїусъ DA былъ къ ней перпендикулярепъ: тогда уголъ JEC равенъ будетъ сферическому углу A; и поелику полагается, что двѣ плоскости DBC, DBA перпендикулярны между собою: то линѣя CJ, перпендикулярная общему ихъ сѣченїю BD, будетъ (185) перпендикулярна плоскости DBA; а посему и прямой JE (178).

Положивъ сїе, въ прямоугольномъ треугольникѣ

DJC, будетъ (296) DJ:CJ:: R: тан. JDC; также въ прямоугольномъ треугольникѣ EJC, CJ: JE :: тан. JEC: R; чегоради (100) DJ : JE :: тан. JEC: тан. JDC или:: тан. A: тан. BC; ибо уголъ JDC имѣетъ мѣрою дугу BC. Есть же въ прямоугольномъ треугольникѣ JED (295) DJ: JE:: R: син. JDE или син. AB; слѣдовательно ради общаго содержанія DJ къ JE будетъ R: син. AB :: тан. A: тан. BC.

352. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ ABC, ежели продолжены будутъ двѣ стороны BC, AC около одного изъ косвенныхъ угловъ, къ точкамъ D и E, такъ, чтобъ каждая изъ DB, AE была 90°; и ежели краи ихъ точки D и E будутъ соединены дугою великаго круга DE; составится новый прямоугольный треугольникъ CED, имѣющій прямый уголъ при точкѣ E, котораго части будутъ или равныя частямъ треугольника ABC, или ихъ комплементы. фиг. 177

Продолжимъ стороны AB и DE, пока встрѣтятся въ точкѣ F. Послику BD есть 90°, и перпендикулярна къ AB, то точка D есть полюсъ дуги AB (326); посему DF есть 90°, и перпендикулярна къ AF; для той же причины и DA есть 90°.

Понеже AE по устроенію 90°; естьже и DA 90°; то точка A есть полюсъ дуги DF (325); а посему AE перпендикулярна къ DF, и слѣдовательно треугольникъ CED прямоугольный, имѣющій прямый уголъ при точкѣ E.

Положивъ сіе, явно, что уголъ E равенъ углу B, и что уголъ DCE равенъ углу ACB (321); что сторона DC есть комплементъ стороны CB; что сторона DE будучи комплементъ EF, которая есть (328) мѣра угла CAB, есть комплементъ сего угла CAB; что CE есть комплементъ AC; и что уголъ D, имѣющій мѣрою дугу BF, которая комплементъ AB, есть самъ комплементъ сей дуги AB;

чего ради дѣйствительно части треугольника DCE, или равны частямъ треугольника ABC, или ихъ комплементы.

Можно тоже самое доказать и о треугольникѣ AHJ, который изобразится продолжая выше точки A, стороны BA, AC около косвеннаго угла BAC, доколѣ каждая сдѣлается 90°.

353. Изъ сего явствуетъ, что когда извѣстны въ треугольникѣ ABC три вещи, то извѣстны будутъ три вещи и въ каждомъ изъ треугольниковъ CED, AHJ. Также видно, что остальныя три части въ треугольникѣ ABC, будучи сысканы, сдѣлаютъ извѣстными остальныя три части въ каждомъ изъ сихъ двухъ треугольниковъ CED, AHJ, и обратно.

И такъ, когда разрѣшая треугольникъ ABC, не можно употребить непосредственно ни единаго изъ двухъ началъ показанныхъ (349 и 351); въ такомъ случаѣ должно прибѣгнуть къ одному изъ треугольниковъ CED, AHJ; и тогда приложенїе того или другаго изъ сихъ двухъ началъ будетъ имѣть мѣсто, и дастъ свѣденїе о частяхъ сихъ треугольниковъ, которые потомъ сдѣлаютъ извѣстными части треугольника ABC, какъ о семъ сей часъ было сказано. Мы впредь называть будемъ треугольники CED, AHJ комплементными (дополнительными) треугольниками.

Ежели бы стороны AB, AC, или AC, BC, которыя въ доказанной пропорцїи (352) полагаются
Фиг. 178. меньше 90°, были каждая больше, или одна изъ нихъ больше, а другая меньше 90°, какъ въ треугольникѣ FBC; тогда вмѣсто вычисленїя треугольника FBC, надлежало бы вычислить треугольникъ ABC, составленный изъ дугъ FC, FB, продолженныхъ до 180°; части сего треугольника будучи извѣстны, сдѣлаютъ извѣстными и части треугольника FBC. Въ прочемъ нѣтъ необходимости въ семъ способѣ; пропорцїя, которую

покажетъ фигура 177, имѣетъ всегда мѣсто, хотя бы части треугольника были меньше или больше 90°.

Замѣтимъ о прямоугольныхъ сферическихъ треугольникахъ то, что мы сказали о прямолинѣйныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ; а именно, что прямой уголъ будучи извѣстенъ, довольно, чтобъ рѣшить прямоугольный треугольникъ, знать двѣ вещи кромѣ прямаго угла. Приступимъ теперь къ примѣрамъ.

Примѣръ I. Положимъ сторону вс 15°, 17′; уголъ а, 23°. 42′; требуется сыскать ипотенузу ас. фиг. 177

Для сысканія ипотенузы, можно непосредственно употребить начало показанное (349), учинивъ сію пропорцію: син. а : син. вс :: r : син. ас. Сія пропорція есть не что иное, какъ показанная (350), которой переставлены оба содержанія. Въ настоящемъ случаѣ будемъ имѣть: син. 23°. 42′ : син. 15°. 17′ :: r : син. ас.

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ:

лог. син. 15°. 17′ - - - -	9, 4209330
лог. радіуса - - - - -	1. . . . . . .
ариѳм. допол. логар. син. 23°, 42′. -	0, 3958304
Сумма или лог. ас - - -	19, 8167634

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 40°. 59′, такъ что ипотенуза ас есть 40°. 59′, ежели она должна быть меньше 90°; или исполненіе 40°, 59′, то есть 139°. 1′, ежели она должна быть больше 90°; ибо здѣсь ничѣмъ не можно ограничить, что ипотенуза ас меньше или больше должна быть 90°, и сіи два рѣшенія суть равно возможныя; въ чемъ легко можно увѣриться, смотря на фигуру 178, гдѣ два треугольника авс, аdе, могутъ противъ того же угла а, имѣть сторону вс, равную

сторонѣ DE; а ипотенузы AC, AE различныя. Но продолжая AC, AB, доколѣ встрѣтятся въ точкѣ F, видно, что AE есть исполненіе AC; поелику AE есть исполненіе EF, равной AC, когда DE равна BC.

фиг. 177. Примѣръ II. Для сысканія стороны AB тогоже треугольника ABC, можно прямо употребить предложеніе показанное (351), дающее сію пропорцію: R : син. AB :: тан. A : тан. BC, или тан. A : тан. BC :: R : син. AB, то есть, тан. 23°. 42′ : тан. 15°. 17′ :: R : син. AB.

А по логарифмамъ дѣлая, будетъ:

лог. тан. 15°. 17′ - - - -	9, 4365704
лог. радіуса - - - - -	1.........
ариѳ. доп. лог. тан. 23°, 42′ - -	0, 3575658
Сумма, или логариѳмъ син. AB -	19, 7941362

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 38°. 30′, и сторона AB есть 38°. 30′, или 141°. 30′, судя по тому, меньше или больше она должна быть 90°; то есть, должна ли она принадлежать треугольнику ABC, или треугольнику ADE.

фиг. 177. Примѣръ III. Прямый уголъ, уголъ A, и сторона BC будучи всегда одни извѣстныя вещи, примѣчаю, что для сысканія угла C тогоже треугольника, нельзя приложить ни которой изъ двухъ показанныхъ пропорцій (349 и 351), поелику не могу имѣть какъ только двѣ извѣстныя вещи въ одной и въ другой; чего ради прибѣгаю къ комплементному треугольнику DCE, въ коемъ сторона DE, комплементъ угла A 23°. 42′, будетъ 66°. 18′; сторона или ипотенуза DC комплементъ BC или 15°. 17′, будетъ 74°. 43′, и уголъ DCE равенъ искомому углу ACB. Въ треугольникѣ же DCE можно приложить пропорцію показанную въ (350); а именно: син. DC : R :: син. DE : син. DCE; то есть син. 74°. 43′ : R :: син. 66°. 18′ : син. DCE.

Дѣлая по логариѳмамъ:

лог. син. 66° 18′ - - - -	9, 9617355
лог. рад. - - - - - -	1.......
ариѳ. допол. лог. син. 74°, 43′ -	0, 016374
Сумма или лог. син. DCE - -	19, 9773729

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 71°. 40′; слѣдовательно уголъ DCE, а посему искомый уголъ ACB, есть 71°. 40′, или 108°. 20′, супплементъ 71°, 40′; ибо здѣсь ничто не ограничиваетъ, таковъ ли долженъ быть разрѣшаемый треугольникъ ACB, какъ треугольникъ ACB фигуры 178, или таковъ какъ треугольникъ AED сей же самой фигуры; то и остается неизвѣстнымъ, уголъ ли ACB взять должно, или уголъ AED, супплементъ его.

Примѣръ IV. Да будетъ сторона AB треугольника ABC, 48°. 51′, и сторона BC 37°. 45′; ежели потребно найти ипотенузу AC, должно прибѣгнуть къ комплементному треугольнику DCE, въ которомъ тогда извѣстна будетъ ипотенуза DC, ибо есть комплементъ BC или 37°, 45′; и слѣдовательно будетъ 52°. 15′; извѣстенъ также уголъ D, имѣющій мѣрою BF, комплементъ AB или 48°. 51′; посему будетъ онъ 41°. 09′; а для сысканія ипотенузы AC, должно только вычислить сторону CE, которой она есть комплементъ. Въ треугольникѣ же DCE, для CE, должно сдѣлать сію пропорцію (350): R: син. DC:: син. D: син. CE; то есть R: син. 52°. 15′ :: син. 41° 09′: син. CE. фиг. 177

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ:

лог. син. 41°. 09′ - - - -	9, 8182474
лог. син. 52, 15 - - - -	9, 8980060
Сумма - - - - -	19, 7162534
Лог. рад. - - - - -	1. ....
Остатокъ или лог. син. CE - -	9, 7162534

соотвѣтствующій въ таблицахъ 31°. 21′. Слѣдовательно AC, которая есть дополненіе CE,

будетъ непремѣнно 58° 39'; ибо, понеже двѣ стороны АВ, АС одинаки, ипотенуза должна быть (345) меньше 90°.

Примѣръ V. Чтобъ изъ тѣхъ же данныхъ найти уголъ С, или уголъ А, должно прямо приложить предложенїе (351), которое для угла А дастъ слѣдующую пропорцїю:
R : син. АВ :: тан. А : тан. ВС, или
син. АВ : R :: тан. ВС : тан. А; то есть,
син. 48°. 51' : R :: тан. 37°, 45' : тан. А. По той же причинѣ будетъ для угла С сїя пропорцїя: син. ВС : R :: тан. АВ : тан. С; то есть, син. 37°, 45' : R :: тан. 48°, 51' : тан. С.

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ для угла А:

лог. тан. 37°. 45'	- - -	9, 8888996
лог. рад.	- - - - - -	1.........
ариѳ. допол. лог. син. 48°. 51'	-	0, 1232111
Сумма или лог. тан. А	- -	10, 0121107

Для угла С:

лог. тан. 48°. 51'	- - -	10, 0585415
лог. рад.	- - - - - -	1.........
ариѳ. допол. лог. син. 37°, 45'	-	0, 2130944
Сумма или лог. тан. С	- -	10, 2716359

Отнявъ единицу отъ перьвой цифры, какъ сказано въ (297).

Симъ логариѳмамъ соотвѣтствуютъ въ таблицахъ 45°, 48' и 61°, 51'; изъ которыхъ перьвое количество есть величина угла А, а второе величина угла С. Поелику каждая изъ двухъ сторонъ АВ, ВС меньше 90°; два угла А и С должны быть также (344) меньше 90°.

Сїи примѣры довольны подать свѣденїе, какимъ образомъ должно поступать въ другихъ случаяхъ; но чтобъ въ подобныхъ вычисленїяхъ не имѣть труда употреблять комплементныхъ треугольниковъ, мы приложимъ здѣсь таблицу, показывающую пропорцїи, какую должно брать въ каждомъ случаѣ.

Таблица для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ. (а)

Данныя	Искомыя	Пропорціи	Случаи въ которыхъ искомое должно быть меньше 90°
AB, AC	C	Син. AC : R :: син. AB : син. C.	ежели AB меньше 90°.
	A	Кот. AB : кот. AC :: R : кос. A.	ежели AB и AC одинаки.
	BC	Кос. AB : кос. AC :: R : кос. BC.	ежели AB и AC одинаки.
AB, BC	A	Син. AB : R :: тан. BC : тан. A.	ежели BC меньше 90°.
	C	Син. BC : R :: тан. AB : тан. C.	ежели AB меньше 90.
	AC	R : кос. BC :: кос. AB : кос. AC.	ежели AB и BC одинаки.
AB, A	C	R : кос. AB :: син. A : кос. C.	ежели AB меньше 90°.
	AC	R : кос. A :: кот. AB : кот. AC.	ежели AB и A одинаки.
	BC	R : син. AB :: тан. A : тан. BC.	ежели A меньше 90°.
AB, C	A	Кос. AB : R :: кос. C : син. A.	сумнителенъ.
	AC	Син. C : син. AB :: R : син. AC.	сумнительна.
	BC	Тан. C : тан. AB :: R : син. BC.	сумнительна.
BC, AC	A	Син. AC : R :: син. BC : син. A.	ежели BC меньше 90°.
	C	Кот. BC : кот. AC :: R : кос. C.	ежели AC и BC одинаки.
	AB	Кос. BC : кос. AC :: R : кос. AB.	ежели AC и BC одинаки.
BC, A	C	Кос. BC : R :: кос. A : син. C.	сумнителенъ.
	AC	Син. A : син. BC :: R : син. AC.	сумнительна.
	AB	Тан. A : тан. BC :: R : син. AB.	сумнительна.
BC, C	A	R : кос. BC :: син. C : кос. A.	ежели BC меньше 90°.
	AC	R : кос. C :: кот. BC : кот. AC.	ежели BC и C одинаки.
	AB	R : син. BC :: тан. C : тан. AB.	ежели C меньше 90°.
AC, A	C	Кос. AC : R :: кот. A : тан. C.	ежели AC и A одинаки.
	AB	Кос. A : R :: кот. AC : кот. AB.	ежели AC и A одинаки.
	BC	R : син. AC :: син. A : син. BC.	ежели A меньше 90°.
AC, C	A	R : кос. AC :: тан. C : кот. A.	ежели AC и C одинаки.
	AB	R : син. AC :: син. C : син. AB.	ежели C меньше 90°.
	BC	Кос. C : R :: кот. AC : кот. BC.	ежели AC и C одинаки.
A, C	AC	Тан. C : кот. A :: R : кос. AC.	ежели A и C одинаки.
	AB	Син. A : кос. C :: R : кос. AB.	ежели C меньше 90°.
	BC	Син. C : кос. A :: R : кос. BC.	ежели A меньше 90°.

(а) Сія таблица относится къ треугольнику ABC фигуры 177, въ которомъ уголъ B прямой.

Показанныя въ сей таблицѣ пропорціи, всѣ основаны на двухъ началахъ доказанныхъ въ (349 и 351), и приложенныхъ, или непосредственно къ треугольнику ABC, или къ комплементнымъ треугольникамъ, потомъ перенесены къ треугольнику ABC. На примѣръ, первая пропорція есть та же, что въ §. 349 или въ §. 350, приложенная непосредственно треугольнику ABC, превращая только два содержанія. Вторая одинакова съ показанною въ §. 351, приложенная къ комплементному треугольнику CED, въ которомъ R: син. DE:: тан. D: тан. CE; или относя къ треугольнику ABC, R: кос. A:: кот. AB. кот. AC; или прелагая первое содержаніе на мѣсто втораго, кот. AB: кот. AC :: R: кос. A.

Такимъ же образомъ можно найти прочія пропорціи, показанныя въ сей таблицѣ. Преложенія сдѣланныя въ пропорціяхъ, которыя даютъ непосредственно два начала (349 и 351), не суть необходимы; единственный ихъ предметъ сдѣлать искомое количество четвертымъ членомъ пропорціи.

О сферическихъ косвенноугольныхъ треугольникахъ.

354. Прямоугольные сферическіе треугольники рѣшатся во всѣхъ случаяхъ одною только пропорціею. Что принадлежитъ до косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, то во многихъ случаяхъ должно дѣлать двѣ пропорціи. Въ сихъ случаяхъ потребно опускать перпендикулярно дугу великаго круга, отъ одного изъ угловъ даннаго треугольника, на противулежащую ему сторону. Поелику сія дуга можетъ упасть или на самую сторону, или на продолженіе ея, судя по различнымъ содержаніямъ величины сто-

ронъ и угловъ: потребно, прежде показанія началъ рѣшенія сего рода треугольниковъ, различить случаи, когда перпендикулярно проведенная дуга падаетъ внутри треугольника, и когда внѣ.

355. Дуга великаго круга AD, проведенная перпендикулярно отъ угла A сферическаго треугольника, на противулежащую сторону, падаетъ въ треугольннкѣ, ежели углы B и C одинаки; и внѣ его, когда они не одинаки. фиг. 180 и 181.

Ибо въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB, каждый изъ двухъ угловъ B и C долженъ быть одинакъ съ противулежащею стороною AD (344); слѣдовательно они должны быть и между собою одинаки. фиг. 180

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB, каждый изъ угловъ ACD, ABD, долженъ быть одинакъ съ противулежащею стороною AD; а посему, ибо ABC есть исполненіе ABD, углы ABC и ACD должны быть не одинаки. фиг. 181

Начала для рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

356. Рѣшеніе всѣхъ возможныхъ случаевъ косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, зависитъ отъ пяти началъ, которыя мы покажемъ, и отъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Всѣ сіи начала не нужны вдругъ для каждаго случая, но нужны для рѣшенія всѣхъ. Изъ сихъ пяти началъ, мы уже показали два въ §. 336 и 349; прочія же три здѣсь предлагаются.

357. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC, ежели отъ угла A опущена будетъ дуга AD великаго круга, перпендикулярно на противулежащую сторону BC, фиг. 17

будетъ всегда сїя пропорцїя: косинусъ отсѣка BD, къ косинусу отсѣка CD, такъ какъ косинусъ стороны AB, къ косинусу стороны AC.

Да будетъ G центръ шара, и отъ вершины угла A да будетъ опущенъ перпендикуляръ AJ на плоскость BGC дуги BC, будетъ онъ на плоскости AGD дуги AD. Да будутъ проведены чрезъ прямую AJ двѣ плоскости AJE, AJF такъ, чтобъ радїусы GB, GC были имъ перпендикулярны; а именно радїусъ GB перпендикуляренъ плоскости AJE, а радїусъ GC, плоскости AJF. Къ симъ самымъ радїусамъ да будутъ опущены отъ точки D перпендикулярныя DH, DK.

Треугольники GJE, GDH будутъ подобные, по причинѣ линей JE, DH, перпендикулярныхъ къ GB; по той же причинѣ, треугольники GDK, GJF подобны. Слѣдовательно произойдутъ сїи двѣ пропорцїи:

GH: GE:: GD: GI.
и GK: GF:: GD: GI.

И такъ ради *общаго содержанїя* GD къ GJ, будетъ GH: GE:: GK: GF. Но GH есть косинусъ дуги BD (270); GE косинусъ дуги AB; GK косинусъ дуги CD; и GF косинусъ дуги AC; чего ради кос. BD: кос. AB:: кос. CD: кос. AC; или полагая третїй членъ на мѣстѣ втораго, а вторый на мѣстѣ третьяго:

кос. BD: кос. CD:: кос. AB: кос. AC.

358. Положивъ тоже, что и въ предъидущемъ предложенїи, будетъ сїя другая пропорцїя: синусъ BD, къ синусу CD, такъ какъ котангенсъ угла B, къ котангенсу угла C.

Поелику углы AEJ, AFJ равны угламъ B и C каждый каждому, такъ какъ мы видѣли въ доказательствѣ §. 349: чего ради, ибо треуголь-

ники AJE, AJF прямоугольные, углы EAJ, FAJ суть комплементы угловъ AEJ, AFJ; а посему и угловъ B и C.

Положивъ сїе, въ треугольникѣ AEJ будетъ (296), R: тан. EAJ или кот. B:: AJ: JE; и въ прямоугольномъ треугольникѣ AJF, тан. JAF или кот. C: R:: JF: AJ. Итакъ (100) кот. C: кот. B:: JF: JE.

Но подобные треугольники GFJ, GKD, и также подобные треугольники GEJ, GHD, даютъ сїи пропорцїи:

JF: DK:: GJ: GD.

и JE: DH:: GJ: GD.

Слѣд. JF: DK:: JE: DH

или JF: JE:: DK: DH.

И посему также кот. C: кот. B:: DK: DH; но DK и DH суть синусы отсѣковъ DC и DB; чего ради наконецъ кот. C: кот. B:: син. DC: син. DB.

359. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC, ежели отъ одного изъ угловъ A опущена будетъ перпендикулярная дуга AD, на противулежащую сторону BC, будетъ сїя пропорцїя: тангенсъ половины стороны BC, къ тангенсу полусуммы двухъ прочихъ сторонъ, такъ какъ тангенсъ полуразности ихъ, къ тангенсу полуразности двухъ отсѣковъ CD, BD, или къ тангенсу ихъ полусуммы. фиг. 180. фиг. 181.

Доказано (357), что кос. AB: кос. AC:: кос. BD: кос. CD; чего ради (98) кос. AB + кос. AC: кос. AB — кос. AC:: кос. BD + кос. DC: кос. BD — кос. DC; но (287) кос. AB + кос. AC: кос. AB - кос. AC:: кот. $\frac{AC+AB}{2}$: тан. $\frac{AC-AB}{2}$; и по сей же причинѣ кос. BD + кос. CD: кос. BD — кос. CD:: кот. $\frac{CD+BD}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$; слѣдовательно

кот. $\frac{AC+AB}{2}$: тан. $\frac{AC-AB}{2}$:: кот. $\frac{CD+BD}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$,

или кот. $\frac{AC+AB}{2}$: кот. $\frac{CD+BD}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан.

$\frac{CD+BD}{2}$; или понеже (280) котангенсы возвратно пропорцїональны тангенсам, тан. $\frac{CD+BD}{2}$ тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$.

Но в фигурѣ 180, CD+BD равны BC; а в фигурѣ 181, CD—BD равна BC; слѣдовательно для фигуры 180, будет тан. $\frac{BC}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$; а для фиг. 181, будет тан. $\frac{CD-BD}{2}$. тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{BC}{2}$; или тан. $\frac{BC}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD+BD}{2}$.

Рѣшенїе косвенноугольных сферических треугольников.

360. Предложенныя пред сим начала, и вторая пропорцїя в таблицѣ данной для прямоугольных треугольников, достаточны для рѣшенїя косвенноугольных сферических треугольников, или по крайней мѣрѣ для опредѣленїя синусов или тангенсов различных частей составляющих сїи треугольники. Много таких случаев, в которых три данныя могут опредѣлить все прочее; но есть много и таких, гдѣ вопрос остается неопредѣленным; ибо сїи данныя не могут ограничить, что искомая вещь больше или меньше 90°; однакоже, хотя вообще разсматривая, находим число сих послѣдних случаев довольно немалое, весьма рѣдко случается, в обыкновенных употребленїях сферической Тригонометрїи, чтоб не извѣстно было, какого вида должна быть искомая сторона, или искомый угол.

Прежде нежели приступимъ къ рѣшенію треугольниковъ, напомнимъ, что синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ угла или дуги, суть тѣже самые, какъ для сей дуги или угла, такъ и для супплементовъ ихъ.

361. Вычисленіе косвенноугольныхъ треугольниковъ, можно привести къ шести случаямъ, которыхъ рѣшеніе мы теперь покажемъ; а потомъ изъ оныхъ выведемъ рѣшеніе и прочихъ.

Вопросъ I. Даны двѣ стороны AB, AC, и одинъ противулежащій уголъ B, сыскать уголъ противулежащій другой данной сторонѣ. фиг. 180

Сдѣлай сію пропорцію (349): син. AC : син. AB :: син. B : син. C. Уголъ C можетъ быть больше или меньше 90°.

Вопросъ II. Даны двѣ стороны AB, AC, и одинъ противулежащій уголъ B, сыскать третію сторону BC. фиг. 180

Отъ угла A, противулежащаго искомой сторонѣ, вообрази дугу AD ей перпендикулярную; и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB, вычисли отсѣкъ BD, по сей пропорціи, которая подобна второй пропорціи вышеприложенной таблицы;

кос. B : R :: кот. AB : кот. BD.

или лучше R : кос. B :: тан. AB : тан. BD.

Сія пропорція таже что и первая; ибо (280) тангенсы возвратно пропорціональны котангенсамъ.

А чтобы имѣть другой отсѣкъ CD, сдѣлай сію пропорцію (357):

кос. AB : кос. AC :: кос. BD : кос. CD.

Тогда, судя по тому, что AD падаетъ внутри треугольника, или внѣ его, будемъ имѣть BC, взявъ сумму или разность отсѣковъ BD и DC.

Вопросъ III. Даны два угла B и C, и одна противулежащая сторона AB, сыскать сторону BC прилежащую симъ угламъ. фиг. 1

Отъ угла A, противулежащаго искомой сторонѣ BC, вообрази дугу AD ей перпендикулярную; и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB, вычисли BD тою же пропорціею, какая употреблена во II вопросѣ:

R: кос. B:: тан. AB: тан. BD.

Для другаго отсѣка CD сдѣлай сію пропорцію (358):

кот. B: кот. C:: син. BD: син. CD.

А чтобъ имѣть BC, возьми сумму или разность отсѣковъ CD и DB, судя по тому, что перпендикуляръ падаетъ внутри треугольника, или внѣ его.

Вопросъ IV. Изъ данныхъ двухъ сторонъ

г. 180. AB и BC, и угла B въ оныхъ содержимаго, находить третію сторону AC.

Отъ одного изъ неизвѣстныхъ угловъ A, вообрази дугу AD, перпендикулярную противулежащей сторонѣ BC; вычисли отсѣкъ BD, тою же пропорціею, какая была во II вопросѣ.

R: кос. B:: тан. AB: тан. BD.

Отними BD отъ извѣстной стороны BC (фиг. 180), или приложи оную къ сей сторонѣ (фиг 181), будешь имѣть отсѣкъ CD; потомъ для сысканія AC, сдѣлай сію пропорцію (357): кос. BD: кос. CD:: кос. AB: кос. AC.

Вопросъ V. Изъ данныхъ двухъ сторонъ

. 180. AB, BC, и угла B содержимаго въ оныхъ, находить одинъ изъ двухъ прочихъ угловъ; на примѣръ уголъ C.

Отъ третьяго угла A, проведи дугу AD, перпендикулярную къ противулежащей сторонѣ BC; вычисли отсѣкъ BD, тою же пропорціею, какъ и во II вопросѣ.

R: кос. B:: тан. AB: тан. BD.

Отними BD отъ извѣстной стороны BC (фиг. 180), или приложи оную къ сей сторонѣ

(фиг. 181), будешь имѣть отсѣкъ CD; а для угла C, сдѣлай сію пропорцію (358): син. BD: син. CD:: кош. B: кош. C.

Вопросъ VI. Изъ данныхъ трехъ сторонъ AB, AC, BC, находить одинъ изъ угловъ; на примѣръ, уголъ B. фиг. 180

Вообразивъ дугу AD перпендикулярную къ сторонѣ BC прилежащей искомому углу, вычисли полуразность двухъ отсѣковъ BD, DC, сею пропорціею (359): тан $\frac{BC}{2}$: тан. $\frac{AB+AC}{2}$:: тан. $\frac{AB-AC}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$. Нашедъ полуразность, вычти оную изъ половины BC; будешь имѣть (301) меньшій отсѣкъ BD; тогда, чтобъ имѣть уголъ B, сдѣлай сію пропорцію, которая всегда таже, что и во II вопросѣ, но здѣсь превращена:

тан. AB: тан. BD: R: кос. B.

Ежели перпендикулярная должна упасть внѣ треугольника, первая пропорція вмѣсто полуразности покажетъ полусумму: чего ради должно тогда для меньшаго отсѣка BD, вычесть половину BC изъ сей полусуммы, ибо въ такомъ случаѣ BC есть разность двухъ отсѣковъ. фиг. 181.

Можно еще рѣшить сей вопросъ правиломъ подобнымъ показанному для такого же случая, въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ. Сіе правило есть слѣдующее:

Возми полусумму трехъ сторонъ, изъ сей полусуммы вычти порознь каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка.

Тогда къ двойному логариѳму радіуса, приложи логариѳмы синусовъ сихъ двухъ остатковъ, и изъ цѣлаго вычти сумму логариѳмовъ синусовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; остатокъ будетъ логариѳмъ квадрата синуса

половины сего угла. Возьми половину сего остальнаго логариѳма; и ищи какому числу градусов и минут она соотвѣтствует в таблицах; сїе самое будет половина требуемаго угла.

Доказательство на сїе правило, равно как и на показанное (304) для прямолинѣйнаго треугольника, дадим в третьей части.

362. Из предложенных шести случаев можно вывесть другїе шесть.

Вопрос VII. Из данных двух углов F
фиг. 182. и G, и одной противулежащей стороны GE, находить сторону EF, противулежащую другому извѣстному углу G.

Вообразив супплементный треугольник ABC, и взяв супплементы углов G и F, и стороны GE, будешь имѣть (336) стороны AC, AB, и угол B; итак вычисля угол C, по первому вопросу, супплемент его будет сторона EF. (336).

Впрочем сїе рѣшенїе даем мы единственно *для сохраненїя подобїя с слѣдующими случаями; ибо сей вопрос рѣшится* непосредственно показанным предложенїем (349), дѣлая сїю пропорцїю: син. F: син GE:: син G: син. FE.

фиг. 182. Вопрос VIII. Из двух углов F и G, и одной противулежащей стороны GE, находить третїй угол E.

Взяв супплементы трех данных, извѣстны будут в супплементном треугольникѣ стороны AC, AB, и угол B. Вычисли сторону BC по II вопросу; супплемент сей стороны будет величина угла E (336).

Вопрос IX. Из двух сторон EG, EF, и
фиг. 182. одного противулежащаго угла G, находить угол E, содержимый в двух данных сторонах.

Взяв супплементы трех данных, извѣстны будут в супплементном треугольникѣ

АВС, уголъ В, уголъ С и сторона АВ. Вычисли сторону ВС по III вопросу; супплементъ оной будетъ величина угла Е (336).

Вопросъ X. Изъ двухъ угловъ G и Е, и стороны имъ прилежащей GE, находить третій уголъ F. фиг. 182.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ АВС, стороны АВ, ВС, и содержимый уголъ В. Вычисли сторону АС по IV вопросу; супплементъ оной будетъ искомый уголъ F (336).

Вопросъ XI. Изъ двухъ угловъ G и Е, и стороны имъ прилежащей GE, находить одну изъ двухъ прочихъ сторонъ; напримѣръ FE. фиг. 182.

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ АВС, стороны АВ, ВС, и уголъ въ нихъ содержимый В. Вычисли уголъ С, по V вопросу: супплементъ его будетъ величина стороны FE (336).

Вопросъ XII. Изъ данныхъ трехъ угловъ Е, F, G, находить одну изъ сторонъ; на примѣръ сторону EG. фиг. 182

Взявъ супплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ супплементномъ треугольникѣ АВС, три стороны ВС, АС, АВ. Вычисли уголъ В, по VI вопросу; супплементъ угла В будетъ величина искомой стороны EG (336).

Не приступая къ примѣрамъ, примѣтимъ, что хотя многіе случаи косвенноугольныхъ треугольниковъ требуютъ двухъ пропорцій; однакожъ находятся нѣкоторые косвенноугольные треугольники, которые могутъ всегда рѣшимы быть одною только пропорціею. Таковы суть тѣ, которыхъ одна изъ сторонъ 90°; ибо взявъ супплементный треугольникъ, будетъ онъ прямоугольный. Сферической треугольникъ, имѣющій одну изъ сторонъ равную 90°, называется квадрантальный (четвертный) треугольникъ.

Предложимъ теперь нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ вопроса IV. Положимъ, что точка F означаетъ положенїе Парижа на землѣ; точка
Фиг. 166. G положенїе Тулона. Извѣстно по наблюденїямъ астрономическимъ, что широта Парижа, или дуга BF равна 48°, 50′; а широта Тулона, или дуга GE равна 43°, 07′; и что разность долготы между Парижемъ и Тулономъ, или дуга BE, или уголъ BAE или FAG есть 3°. 37′. Спрашивается, какое есть самое кратчайшее разстоянїе между Парижемъ и Тулономъ?

Самый кратчайшїй путь на поверхности шара отъ одной точки до другой, есть дуга великаго круга, проходящаго чрезъ сїи точки. Вообрази дугу FG великаго круга. Понеже каждая изъ дугъ AB, AE есть 90°, то вычтя изъ оныхъ дуги BF, GE, изъ которыхъ одна 48°, 50′, а другая 43°, 07′; найдутся дуги AF, AG, одна 41°, 10′, а другая 46°, 53′. Чегоради узнавъ въ треугольникѣ AFG, двѣ стороны AF, AG, и содержимый уголъ FAG, *остается вычислить третїю сторону* FG.

Изобразимъ треугольникъ FAG треугольни-
Фиг. 183. комъ ABC, и положимъ, что AB 41°, 10′, BC 46°, 53′, и уголъ B 3°, 37′. Итакъ по правилу показанному въ IV вопросѣ вычисляю отсѣкъ BD, сею пропорцїею:

R : кос. 3°, 37′ : : тан. 41°, 10′ : тан. BD.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. кос. 3°, 37′ - - - -	9. 9991342
лог. тан. 41°, 10′ - - - -	9, 9417135
Сумма - - - - - -	19, 9408477.
Лог. рад. - - - - - -	1. ......
Остатокъ или лог. тан. BD -	9, 9408477.

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 41°, 07′; вычтя 41°. 07′ изъ BC, то есть изъ 46°, 53′, останется 5°, 46′ для отсѣка CD.

Чтобъ сыскать сторону ас, дѣлаю сходственно предписанному въ IV вопросѣ, сїю пропорцїю:

кос. 41°, 07′: кос. 5°, 46′:: кос. 41°. 10′: кос. ас.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. кос. 41°. 10′	- - -	9, 8766785
лог. кос. 5°. 46″	- - -	9, 9977966
ариѳ. допол. лог. кос. 41°, 07′	-	0, 1229904
Сумма или лог. кос. ас	-	19, 9974655.

Откуду по таблицамъ заключаю, что ас равна 6°. 11′, сїе количество, щитая по 20 лигъ въ градусѣ равно около 124 большимъ лигамъ; но среднихъ лигъ, которыхъ 25 въ градусѣ, приходитъ около 154.

Примѣръ VI вопроса. Говоря о способѣ снимать планы, мы сказали (138), что дадимъ средство приводить на горизонтальную плоскость углы, которые наблюдаемы были выше или ниже сея плоскости. Оное средство здѣсь предлагаемъ.

Да будутъ а, в, с три точки различно возвышенныя надъ горизонтальною плоскостью не, фиг. 18 и да будутъ прямыя вb, аа, сс, перпендикулярныя къ сей плоскости, получимъ треугольникъ аbс, коего вершины угловъ точки а, b, с, представляютъ предметы а, в, с; такъ какъ они должны быть представлены на картѣ.

Полагая, что изъ точки а можно наблюдать двѣ точки в и с, спршивается, что должно сдѣлать, дабы опредѣлить уголъ а.

Должно измѣрить изъ точки а уголъ вас и углы ваа, саа; перьвый можетъ быть измѣренъ безъ всякой трудности; въ разсужденїи каждаго изъ двухъ прочихъ, на примѣръ въ разсужденїи угла ваа, должно расположить инструментъ на вертикальной плоскости воображаемой чрезъ прямую ав, и поставя одинъ изъ дїаметровъ горизонтально, посредствомъ отвѣса, которой тогда

означитъ прямую Aa, должно направить другой діаметръ къ точкѣ B; тогда увидимъ на инструментѣ сколько градусовъ между отвѣсомъ и діаметромъ направленнымъ къ точкѣ B; что покажетъ величину угла BAa. Такимъ же образомъ найдется и уголъ CAa.

Положивъ сіе, ежели представить, что какимъ нибудь радіусомъ AD и точкою A, какъ центромъ, написаны дуги DF, DG, GF, на плоскостяхъ угловъ BAC, BAa, CAa; то составится сферическій треугольникъ DGF, въ которомъ извѣстны будутъ стороны DF, DG, GF, мѣры угловъ BAC, BAa, CAa, кои были наблюдаемы; уголъ DGF сего треугольника равенъ будетъ углу bac, поелику двѣ прямыя ba, ac будучи перпендикулярны пересѣченію Aa двухъ плоскостей Ab, Ac, дѣлаютъ тотъ же уголъ, что и сіи плоскости; чего ради (320) сей уголъ равенъ сферическому углу DGF.

Положимъ же, что сіи углы BAC, DAa, CAa по измѣренію *найдены, перьвой* 82°, 10′, *второй* 77°, 42′, третій 74°, 24′; остается теперь вычислить уголъ B, противулежащій сторонѣ AC, которая равна 82°, 10′ въ сферическомъ треугольникѣ ABC, коего три стороны AB, AC, BC, суть по порядку 74°, 24′, 82°, 10′, 77°, 42′. Чего ради согласуясь съ тѣмъ, что сказано было въ VI вопросѣ, вычисляю полуразность двухъ отсѣковъ BD и CD, сею пропорціею: тан. $\frac{BC}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-DB}{2}$; то есть, тан. 38°, 51′: тан. 78°, 17′ :: тан. 3°, 53′: тан. $\frac{CD-DB}{2}$.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. тан. 3°. 53′	- - -	8, 8317478
лог. тан. 78°. 17′	- - -	10, 6832050
ариѳ. допол. лог. тан. 38°. 51′	-	0, 0939569
Сумма или лог. тан. $\frac{CD - DB}{2}$		~~1~~9, 6089097.

Который соотвѣтствуетъ 22°. 07′.

Вычтя 22°. 07′ полуразность изъ половины BC, т. е. изъ 38°. 51′; получимъ (301) меньшій отсѣкъ BD 16°. 44′. Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB, чтобъ имѣть уголъ B, дѣлаю въ сходственность сказанному въ VI вопросѣ, сію пропорцію:

тан. AB: тан. BD:: R: кос. B; то есть,

тан. 74°. 24′: тан. 16°. 44′:: R: кос. B.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. тан. 16°. 44′	- - - -	9, 4780592
лог. рад.	- - - - - -	1..........
ариѳ. допол. лог. тан. 74°. 24′	-	89, 4459232
Сумма или лог. кос. B	- -	~~1~~08, 9239824

Сей логариѳмъ въ таблицахъ соотвѣтствуетъ углу 4°. 48′, коего комплементъ 85°. 12′ есть величина угла B, то есть угла bac. фиг. 18

Дабы привесть уголъ C къ углу c, должно сдѣлать подобное вычисленіе, полагая, что наблюдаемы были углы, ACB, ACC, и BCC.

Что касается до третьяго угла b, не нужно его вычислять; ибо въ прямолинѣйномъ треугольникѣ abc три угла равны двумъ прямымъ.

примѣчаніе.

Полагая всегда, что каждая часть сферическаго треугольника не больше 180°; можно ограничивать довольно простымъ правиломъ, ежели искомое должно быть меньше или больше 90°, или ежели неопредѣленно можетъ быть и больше и меньше 90°. Вотъ сіе правило:

Ежели четвертый членъ пропорціи, которую должно сдѣлать для рѣшенія сферическаго треугольника, есть синусъ: дуга, къ которой онъ будетъ принадлежать, можетъ быть и меньше и больше 90°, исключая случаи, когда треугольникъ будетъ прямоугольный, и изъ трехъ извѣстныхъ частей одна противулежитъ искомой; въ такомъ случаѣ, (344) сіи два послѣднія количества всегда между собою одинаки.

Но ежели четвертый членъ есть косинусъ, или котангенсъ, или тангенсъ; то въ разсужденіи извѣстныхъ членовъ пропорціи, наблюдай слѣдующее правило: дай знакъ + радіусу и всѣмъ синусамъ, хотя бы дуги, къ которымъ они принадлежатъ, были больше или меньше 90°. Дай равномѣрно знакъ + всѣмъ косинусамъ, тангенсамъ и котангенсамъ дугъ меньшихъ 90°; и на противъ дай знакъ — всѣмъ косинусамъ, тангенсамъ и котангенсамъ дугъ бо́льшихъ 90°: тогда, ежели число знаковъ — есть 0, или четное, дуга соотвѣтствующая четвертому члену, будетъ всегда меньше 90°; на противъ же сего она будетъ больше 90°, ежели число знаковъ — есть не четное.

Сіе правило основано, 1е, на правилѣ умноженія и дѣленія количествъ разсуждаемыхъ по ихъ знакамъ, что увидимъ въ Алгебрѣ; 2е, на томъ, что примѣчено (273 и въ послѣд.) относительно къ синусамъ, косинусамъ и проч. дугъ ме́ньшихъ или бо́льшихъ 90°.

Прибавленіе отъ переводчиковъ.

Въ дополненіе сказаннаго сочинителемъ о рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, присовокупимъ:

I. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не нужны пропорціи для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ; а именно, когда сферической треугольникъ имѣетъ два или три угла прямые; ибо стороны противулежащія симъ угламъ будутъ по 90° (344); третія же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противулежащій (328). Такожде, когда сферической треугольникъ имѣетъ двѣ или три стороны по 90°; то углы противулежащіе симъ сторонамъ будутъ прямые, а третій уголъ тогоже числа градусовъ, что и сопротивная ему сторона. Наконецъ, когда сферической треугольникъ имѣетъ одну сторону 90°, и одинъ уголъ прямой; тогда есть въ немъ и другая сторона 90°, и другой уголъ прямой; третія же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противулежащій.

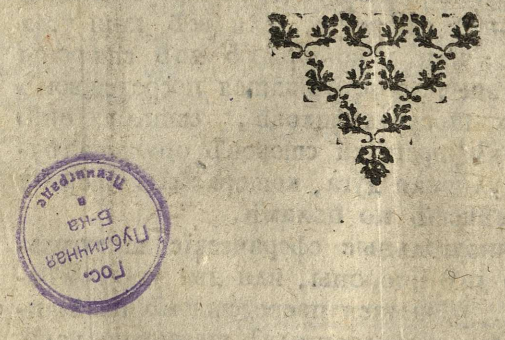
II. Косвенноугольные сферическіе треугольники, имѣющіе всѣ три стороны, или всѣ три угла взаимно равные; или у которыхъ двѣ стороны или два угла равны; легче рѣшатся посредствомъ прямоугольныхъ треугольниковъ, естьли отъ третьяго угла къ третьей сторонѣ опущена будетъ перпендикулярная дуга, которая сію сторону и сей уголъ разсѣчетъ по поламъ.

III. Косвенноугольные сферическіе треугольники, въ коихъ двѣ стороны, или два угла вмѣстѣ равны 180°, рѣшатся посредствомъ показанныхъ предъ симъ равнобедренныхъ треугольниковъ. Ибо естьли одна изъ тѣхъ двухъ сторонъ и также третія сторона будутъ продолжены, пока

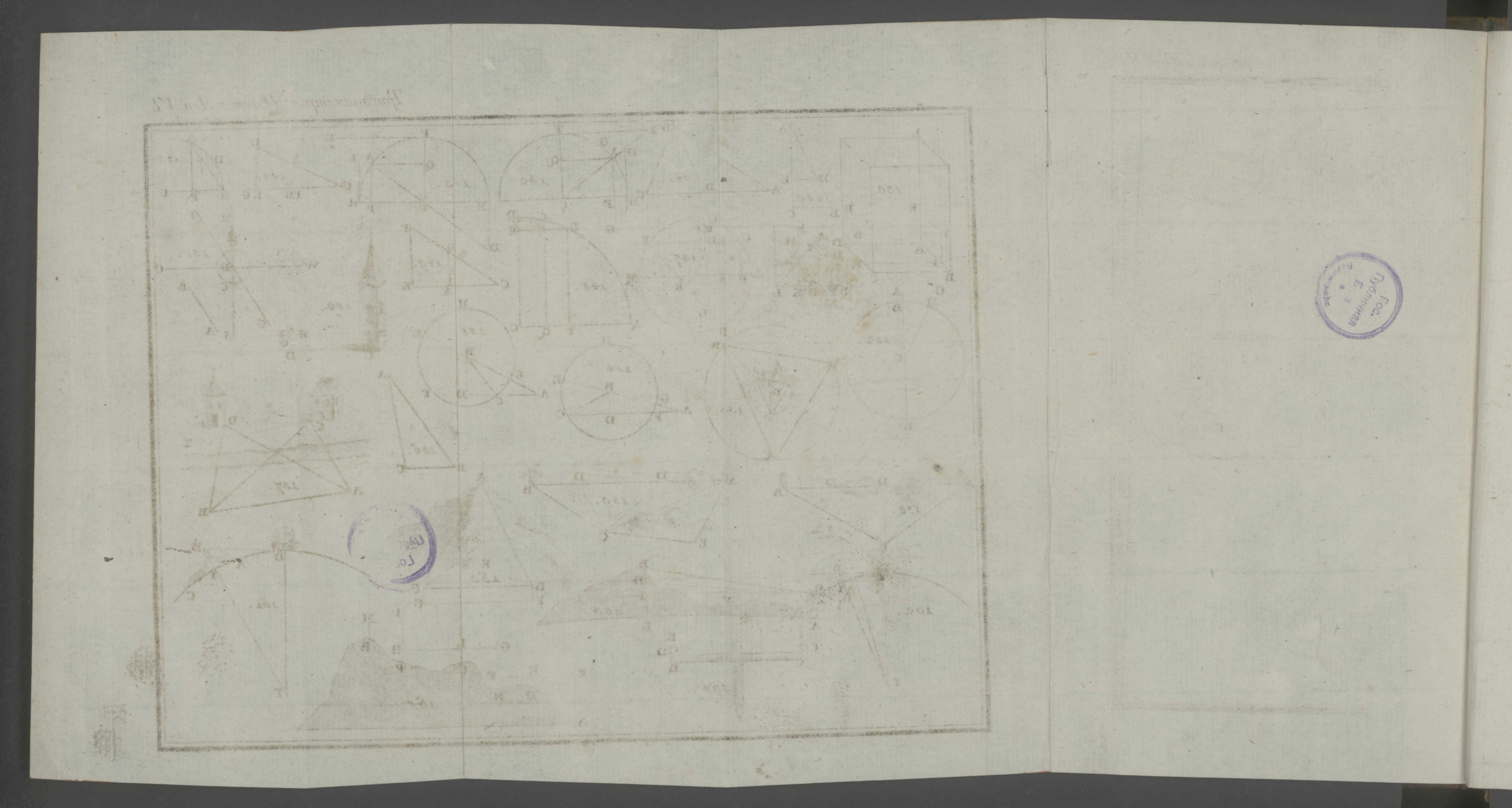
вторично встрѣтятся, то составится новой треугольникъ, въ которомъ или двѣ стороны, или два угла будутъ взаимно равны; чего ради разрѣшая сей треугольникъ, разрѣшится и перьвой.

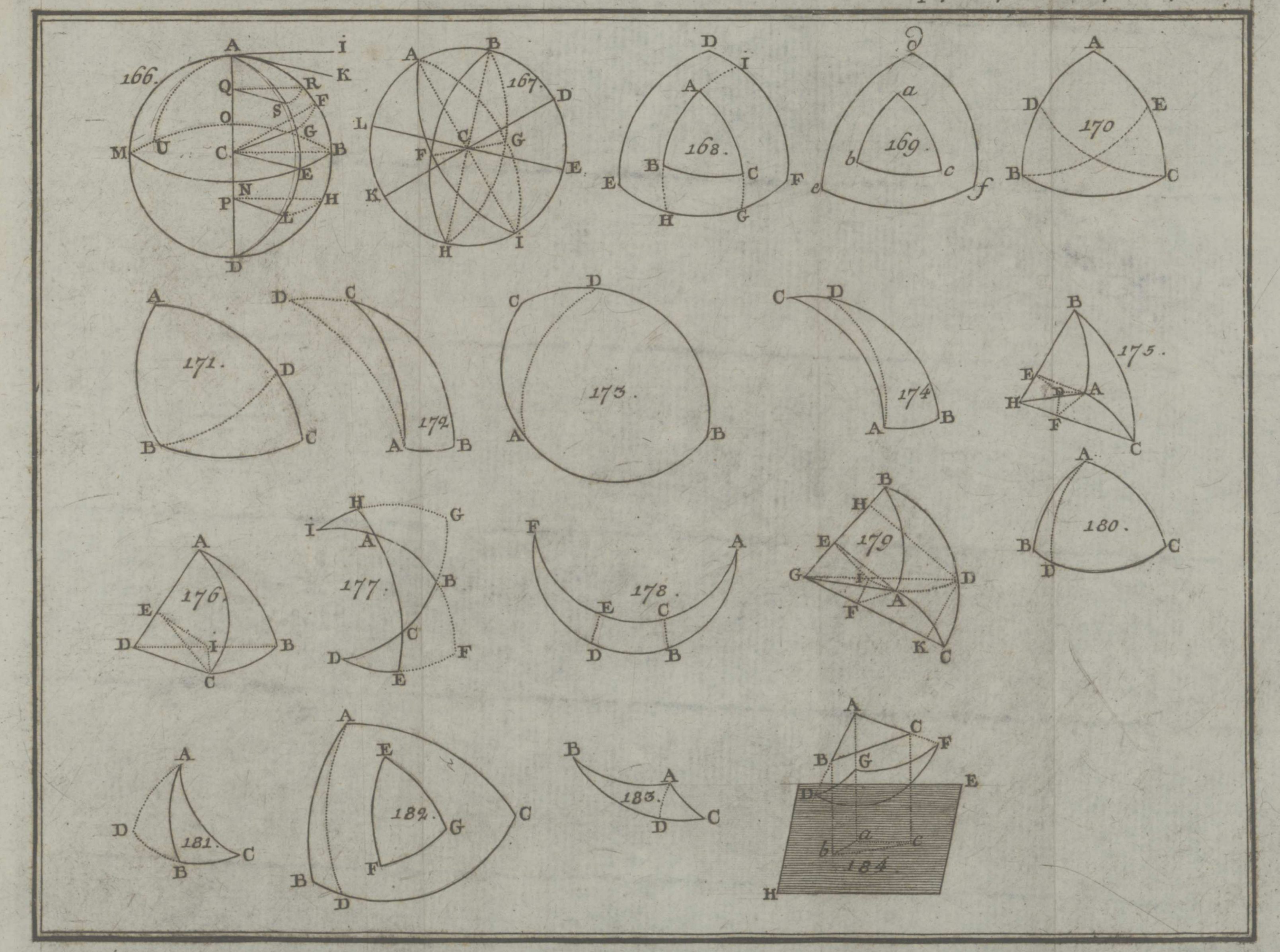
Здѣсь примѣтимъ, что ежели двѣ стороны сферическаго треугольника равны 180°, то и два угла имъ противулежащïе будутъ равны 180°; и обратно. Ибо ежели $AD + DB =$
Фиг. 173. 180°, есть же $CDB = 180^\circ$ (323), посему $AD = CD$; и такъ уголъ $DAC = DCA$ (341) или DBA; чего ради углы $DBA + DAB =$ угламъ $DAC + DAB$, то есть равны 180°. Обратное такимъ же образомъ докажется. Подобно доказать можно, что ежели двѣ стороны сферическаго треугольника больше или меньше 180°, два угла имъ противулежащïе будутъ больше или меньше 180°, и обратно.

КОНЕЦЪ.




Гос. Публичная Б-ка в Ленинграде




166.
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.

Милостивой государь N.N.!

